MATEMATIKA

dodatak udžbeniku matematike

za treći razred gimnazije i srednje strukovne škole

3

izzi

PROFIL Klett

SADRŽAJ

POJAM FUNKCIJE

Termin **funkcija** često susrećemo u svakodnevnom govoru: „Na visokoj je funkciji“, „Dobro obavlja svoju funkciju“, „Koja je funkcija tog instrumenta?“ itd. No u matematici taj termin ima posebno značenje, različito od ovih svakodnevnih.

PRIMJER

1.

a) **Svakomu** je učeniku u razredu pridružena **jedna** završna ocjena iz matematike.
b) **Svakoj** je državi pridružena **njezina** zastava.
c) **Svakomu** je trokutu pridružen **njegov** opseg.

Ako je svakomu elementu skupa D pridružen točno jedan element skupa K, onda se takvo pridruživanje zove **funkcija sa skupa *D* u skup *K***. Da je f funkcija s D u K zapisuje se ovako:

$$f : D \rightarrow K$$

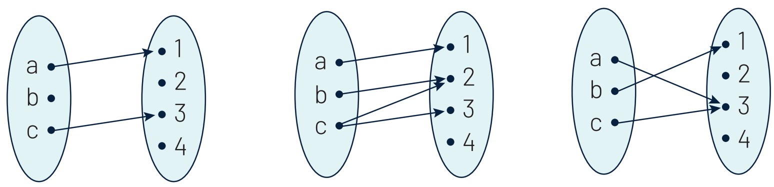
Skup D zove se **domena** ili **područje definicije** funkcije f, a skup K **kodomena** ili **područje vrijednosti** funkcije f. Funkcija se često zove preslikavanje. Element iz D ulazna je vrijednost, nezavisna varijabla, original ili argument, a njemu pridružen element iz K izlazna je vrijednost, zavisna varijabla, slika ili vrijednost funkcije.

Činjenicu da je y vrijednost koju f pridružuje argumentu x zapisujemo:

$$y = f(x) \text{ (čita se: „}y\text{ je f od }x\text{“)}$$

Funkcije možemo ilustrirati jednostavnim dijagramom koji strelicama preslikava elemente iz domene $D = \{a, b, c\}$ u kodomenu $K = \{1, 2, 3, 4\}$:

f g h



Pridruživanje f nije funkcija s D u K jer jednomu originalu iz D nije pridružena slika iz K.

Pridruživanje g nije funkcija s D u K jer su jednomu originalu iz D pridružene dvije slike iz K.

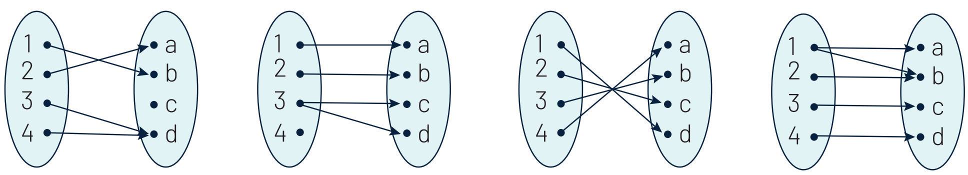
Pridruživanje h jest funkcija s D u K jer je **svakomu** originalu iz D pridružena **točno jedna** slika iz K. (Uočite da ne mora svaki element kodomene biti slika.)

Skup svih elemenata kodomene koji su slika barem jednoga elementa domene naziva se **slika funkcije** i označava se s Im. Dakle, $\mathrm{Im}(h) = \{1, 3\}$.

ZADATAK

1. Koji dijagrami predstavljaju funkcije? Odredi sliku svake od funkcija.

f g h k



Neka su važna svojstva funkcija injektivnost, surjektivnost i bijektivnost.

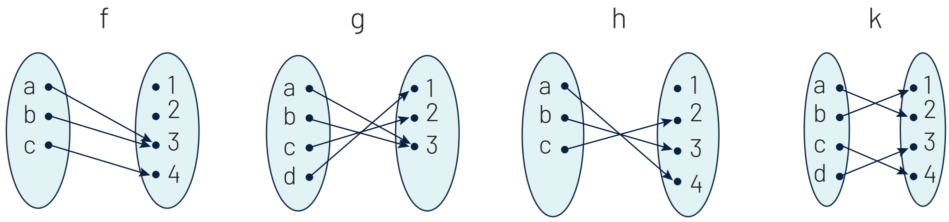
Funkcija je **injektivna** (injekcija) ako različite elemente preslikava u različite elemente.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ za svaki } x_1, x_2 \in D$$

Funkcija je **surjektivna** (surjekcija) ako su svi elementi kodomene slike elemenata domene.

$$\text{Za svaki } y \in K \text{ postoji } x \in D \text{ takav da je } f(x) = y.$$

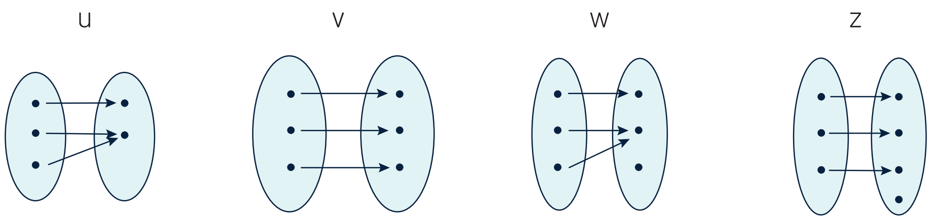
Funkcija je **bijektivna** (bijekcija) ako je injektivna i surjektivna.



Funkcija *f* nije ni injektivna ni surjektivna. Funkcija *g* nije injektivna, ali je surjektivna. Funkcija *h* injektivna je, ali nije surjektivna. Funkcija *k* bijektivna je.

ZADATAK

2. Odredi koje su od sljedećih funkcija: a) injekcije b) surjekcije c) bijekcije.



PRIMJER

2. Zadana je $f: D \longrightarrow K$. Ako su D i K konačni skupovi, koji od njih ima više elemenata ako je f:

a) injekcija b) surjekcija c) bijekcija?

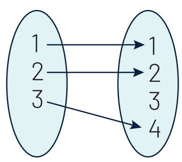
$k(S)$ nazivamo kardinalni broj skupa.

Rješenje

Broj elemenata nekoga skupa označavamo s $k(S)$.

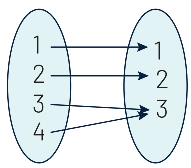
a) Svaki element u D ima točno jednu sliku u K pa K ima barem toliko elemenata koliko i D:

$k(D) \leq k(K)$.

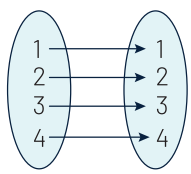


b) Svaki element u K ima bar jedan original u D pa D ima barem toliko elemenata koliko i K:

$k(D) \geq k(K)$.

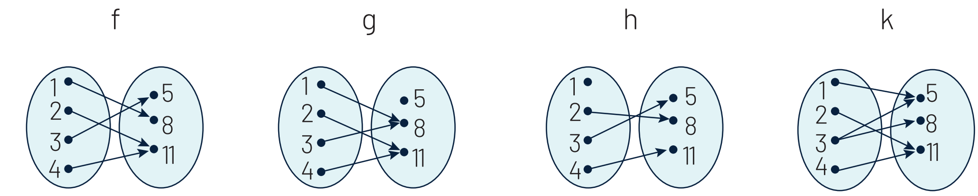


c) Bijekcija je injekcija i surjekcija pa je $k(D) \leq k(K)$ i $k(D) \geq k(K)$, što znači da je $k(D) = k(K)$.



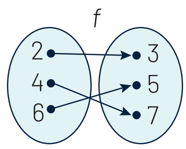
ZADATCI

3. Koji od sljedećih dijagrama predstavlja funkciju?



4. Ako je domena funkcije $D = \{a, b, c, d\}$, a kodomena $K = \{1, 2, 3, 4\}$, nacrtaj jedan dijagram koji predstavlja funkciju i jedan dijagram koji ne predstavlja funkciju.

5. Sljedeći dijagram predstavlja funkciju f.



a) Odredi sliku broja 4.

b) Odredi original broja 5.

c) Koliko je $f(2)$, a koliko $f(6)$?

d) Koliko je $f(3)$?

e) Navedite jedan uređeni par koji se sastoji od originala i njegove slike. Koliko ima takvih uređenih parova?

f) Je li funkcija f bijekcija? Obrazloži.

6. Neka je D skup učenika u razredu, a K skup slobodnih aktivnosti koje se nude u školi. Pod kojim je uvjetima pridruživanje s D u K funkcija, a pod kojim uvjetima to nije?

7. Jesu li navedena pridruživanja funkcije i zašto?

a) pridruživanje koje svakomu čovjeku pridružuje njegovu visinu

b) pridruživanje koje svakomu učeniku u školi pridružuje vrstu kućnoga ljubimca kojeg ima

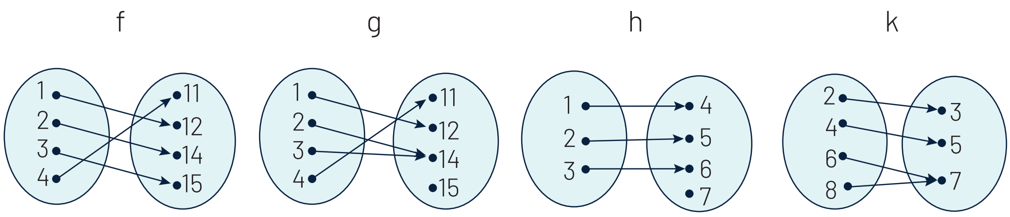
c) pridruživanje koje danu u jednoj godini pridružuje prosječnu dnevnu temperaturu

d) pridruživanje koje temperaturama između −10 °C i 30 °C pridružuje dan u godini u kojemu je to bila prosječna temperatura

8. Ako je $\{(2, 7), (3, 9), (4, 5), (5, 5), (6, 8)\}$ skup svih uređenih parova koji sadrže originale i odgovarajuće slike funkcije f, odredi:

a) domenu te funkcije b) sliku te funkcije c) dijagram te funkcije.

9. Za svaku od navedenih funkcija odredi je li injekcija, surjekcija, odnosno bijekcija.



10. Nacrtaj primjer dijagrama koji prikazuje:

a) injekciju, koja nije surjekcija b) surjekciju, koja nije injekcija c) bijekciju.

REALNE FUNKCIJE

Realnom funkcijom nazivamo funkciju kojoj su domena i kodomena podskupovi realnih brojeva. Realnu funkciju najčešće zadajemo jednadžbom koja opisuje kako se njezina vrijednost y odnosno $f(x)$ računa iz njezina argumenta x. Na primjer, sljedeća jednadžba zadaje linearnu funkciju:

$$y = 3x + 4, \text{ odnosno } f(x) = 3x + 4.$$

Umjesto **„funkcija zadana jednadžbom $y = 3x + 4$"**, kraće kažemo **„funkcija $y = 3x + 4$".**

PRIMJER

1. Izračunajmo vrijednosti realne funkcije (zadane jednadžbom) $y = 2x$ za

a) $x = 3$ b) $x = t^2$ c) $x = p + 3$ d) $x = \dfrac{1+z}{z}$.

Rješenje

a) $y = 2 \cdot 3 = 6$ b) $y = 2t^2$

c) $y = 2(p + 3) = 2p + 6$ d) $y = 2 \cdot \dfrac{1+z}{z} = \dfrac{2+2z}{z}$.

ZADATAK

1. Izračunaj vrijednosti realne funkcije $f(x) = x^2 + x$ za:

a) $x = -2$ b) $x = t + 3$ c) $x = p^2$.

PRIMJER

2. Ako je $f(x) = x^2 - 3$, izračunajmo $f(3)$, $f(t)$, $f(t + 2)$, $f(x^3)$.

Rješenje

Uvrštavamo redom 3, t, $t + 2$ i t^3 umjesto x u $f(x)$:

$f(3) = 3^2 - 3 = 6,$ $f(t) = t^2 - 3,$

$f(t+2) = (t+2)^2 - 3 = t^2 + 4t + 1,$ $f(t^3) = (t^3)^2 - 3 = t^6 - 3.$

ZADATAK

2. Ako je $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$, izračunaj $g(2)$, $g(t - 2)$, $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Ako je realna funkcija zadana jednadžbom, njezina je (prirodna) domena skup svih argumenata za koje se zadanom jednadžbom može izračunati njezina vrijednost. Ako njezina kodomena nije zadana, onda se pretpostavlja da je kodomena skup.

PRIMJER

1. Odredimo prirodnu domenu realne funkcije:

a) $y = 5x^2 - 7$ b) $y = \dfrac{x+3}{x-2}$ c) $y = \sqrt{x-2}$.

Rješenje

a) $5x^2-7$ možemo izračunati za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa je prirodna domena funkcije f skup $\mathbb{R}$.

b) $\dfrac{x+3}{x-2}$ možemo izračunati za svaki $x \in \mathbb{R}$ osim za $x=2$ jer ne možemo dijeliti s 0.

Dakle, prirodna je domena dane funkcije skup $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

c) $\sqrt{x-2}$ bit će realan broj samo ako je $x-2 \geq 0$, tj. $x \geq 2$ jer korijen iz negativnoga broja nije realan broj. Dakle, prirodna domena zadane funkcije jest interval $[2,+\infty\rangle$.

ZADATAK **3.**

Odredi prirodnu domenu realne funkcije:

a) $f(x)=2x+1$

b) $g(x)=\sqrt{x+5}$

c) $h(x)=\dfrac{1}{x-3}$

d) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x-4}}$

e) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

f) $y=x^2+3x+1$.

PRIMJER **2.**

Ako je $f(x-2)=x^2-3$, odredimo $f(x)$.

Rješenje

Označimo zadani argument funkcije s t: $t=x-2$. Onda je $x=t+2$.

Uvrstimo li u zadanu formulu t umjesto $x-2$ i $t+2$ umjesto x, imamo:

$$f(t)=(t+2)^2-3$$
$$f(t)=t^2+4t+1\ .$$

Sada je očito $f(x)=x^2+4x+1$.

ZADATAK **4.**

Ako je $h(2x+1)=\dfrac{x}{1-x}$, odredi $h(x)$.

PRIMJER **3.**

Ako je $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{1}{x}$, odredimo $f(x)$.

Rješenje

Označimo $t=\dfrac{x-1}{x+1}$ i izrazimo x:

$$\begin{aligned} t(x+1)&=x-1\\ tx+t&=x-1\\ tx-x&=-1-t\\ x(t-1)&=-(1+t)\\ x&=\frac{1+t}{1-t},\ t\neq 1. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u zadanu formulu nalazimo $f(t)=\dfrac{1-t}{1+t}$, $t\neq -1$.

Dakle, $f(x)$ je za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ zadano jednadžbom: $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$.

ZADATAK **5.**

Ako je $f(x+1)=2x^2-1$, odredi $f(x)$.

6.

Ako je $h\left(\dfrac{3}{x-1}\right)=\dfrac{x-1}{1+x}$, odredi $h(x)$.

ZADATCI

7. Ako je funkcija zadana jednadžbom $f(x)=1-x$, koliko je:

a) $f\left(-\frac{3}{5}\right)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(100)$? b) $f(-a)$, $f(a^2)$, $f(a-1)$, $f\left(\frac{1}{a^3}\right)$?

8. Za funkciju $f(x)=x^2+2x$, koliko je:

a) $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1-\sqrt{3})$? b) $f(a-1)$, $f(\sqrt{a})$, $f(2a^5)$?

9. Ako je zadana funkcija $f(x)=\frac{x-1}{x}$, koliko je:

a) $f(1)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(1+\sqrt{2})$? b) $f(a)$, $f(\sqrt{2a})$, $f(2-a^3)$?

10. Skup $D=\{-2, -0.5, 0, \sqrt{2}, 100\}$ domena je funkcije f. Odredite njezinu sliku ako je:

a) $f(x)=-2x^2+1$ b) $f(x)=\frac{-2x^2}{x-1}$.

11. Skup $D=\{-2, -1, \pi, \sqrt[3]{30}\}$ domena je funkcije f. Odredite njezinu sliku ako je:

a) $f(x)=-x^3+4$ b) $f(x)=\frac{2(x-1)^2}{x}$.

12. Odredi (prirodnu) domenu realne funkcije f ako je:

a) $f(x)=-\frac{3}{4}x+1$ b) $f(x)=\frac{2}{-x-13}$ c) $f(x)=2\sqrt{x-7}$ d) $f(x)=\frac{2x}{x^2-3x}$

e) $f(x)=3x^2-2x-1$ f) $f(x)=\frac{x+12}{x(-x+12)}$ g) $f(x)=\sqrt{x+7}$ h) $f(x)=\frac{2x}{x^3-9x}$.

13. Ako je $f(x)=2x-5$, odredi vrijednost od m tako da je $f(-m)=13$.

14. Odredi vrijednost od m ako je $f(x)=x^2-5x$ i ako je $f(m)=6$.

15. Ako je $f(x)=\frac{2x-5}{4x-1}$, odredi vrijednost od m tako da je $f(m-1)=\frac{1}{3}$.

16. Odredi vrijednost od m ako je $f(x)=\sqrt{x^2+5}$, odredi vrijednost od m tako da je $f(2m)=3$.

17. Koliko je $f(x)$ ako je $f(2x-3)=3x-4$?

18. Ako je $f(2t)=t-8$, koliko je $f(11)$ i $f(x)$?

19. Izračunaj $f(x)$ ako je $f(1+t)=\frac{t+2}{1-t}$?

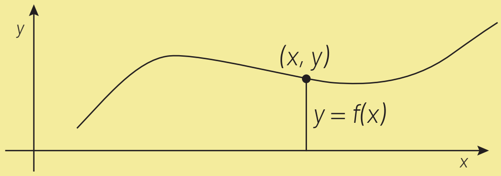
20. Ako je $f\left(\frac{2}{t}\right)=\frac{t-1}{1+2t}$, koliko je $f(x-1)$?

21. Koliko je $f(x+1)$ ako je $f\left(\frac{t-2}{t}\right)=\frac{2t-1}{1-t}$?

GRAF REALNE FUNKCIJE

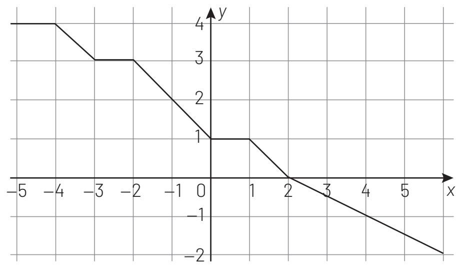
Realnu funkciju najzornije prikazujemo njezinim grafom u pravokutnome koordinatnom sustavu.

Graf realne funkcije jest skup svih točaka s koordinatama (x, y) za koje je $x \in D$ i $y = f(x)$. Ako je D interval realnih brojeva, onda je graf te funkcije krivulja koja se proteže nad tim intervalom. Zapisujemo: $\Gamma_f = \{(x,y) : x \in D, y = f(x)\}$.



PRIMJER **1.**

Na slici je graf funkcije $y = f(x)$.



a) Koliko je: $f(-5)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(6)$?

b) Za koji x vrijedi $f(x) = -1$, $f(x) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x) = 3$?

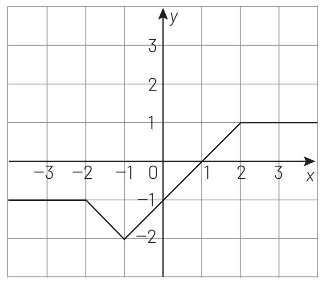
Rješenje

a) Graf je skup točaka (x, y), gdje je $y = f(x)$, dakle zadane su nam x-koordinate, a trebamo očitati y-koordinate točaka grafa pa imamo $f(-5) = 4$, $f(-1) = 2$, $f(1) = 1$, $f(6) = -2$.

b) Zadane su nam y-koordinate, a trebamo očitati x-koordinate točaka grafa pa imamo: $f(x) = -1$ za $x = 4$, $f(x) = 0$ za $x = 2$, $f(x) = 1$ za $x \in [0,1]$, $f(x) = 3$ za $x \in [-3,2]$.

ZADATAK **1.**

Na slici je graf funkcije $y = f(x)$.

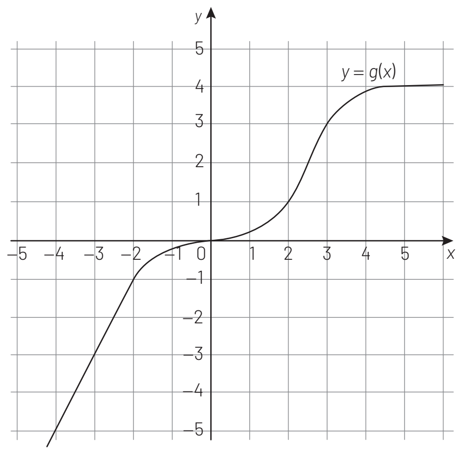


a) Koliko je: $f(1)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(-1)$?

b) Za koji x vrijedi $f(x) = -1$, $f(x) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x) = -2$?

2.

Na slici je graf funkcije $y = g(x)$.



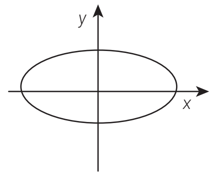
a) Koliko je:
$g(0)$, $g(-2)$, $g(2)$, $g(-4)$, $g(-3)$, $g(5)$?

b) Za koji x vrijedi
$g(x) = -1$, $g(x) = 0$, $g(x) = 1$, $g(x) = 3$?

Vertikalni i horizontalni test

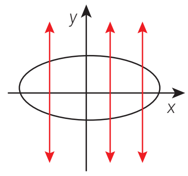
PRIMJER **2.**

Je li na slici prikazan graf neke funkcije?



Rješenje

Ovo nije graf funkcije, jer funkcija svakom elementu domene mora pridruživati točno jedan element kodomene. Na slici mu pridružuje dva, što vidimo po vertikalnim pravcima koji graf sijeku u dvije točke.



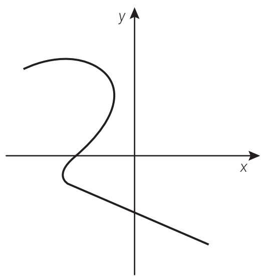
Vertikalni test

Skup točaka predstavlja graf funkcije ako ga bilo koji pravac paralelan s osi siječe u najviše jednoj točki.

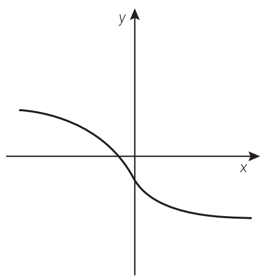
ZADATAK **3.**

Je li na slici prikazan graf neke funkcije?

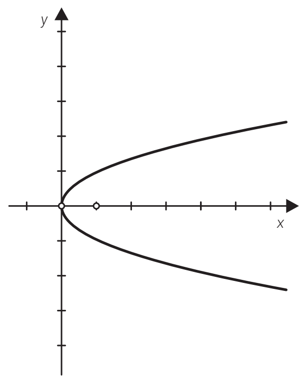
a)



b)

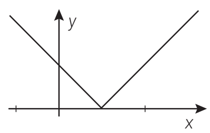


c)



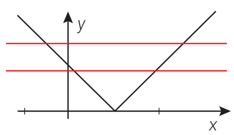
PRIMJER **3.**

Je li na slici graf injektivne funkcije?



Rješenje

Injekcija kao funkcija mora proći vertikalni test. Ovaj ga graf očito prolazi. No, on nije graf injekcije, jer se injekcijom u svaki element kodomene može preslikati najviše jedan element domene. Na slici se preslikavaju dva, što vidimo po horizontalnim pravcima koji graf sijeku u dvije točke.



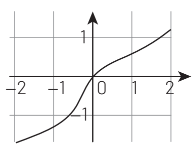
Horizontalni test

Skup točaka koji predstavlja graf funkcije predstavlja graf injekcije ako ga bilo koji pravac paralelan s osi *x* siječe u najviše jednoj točki.

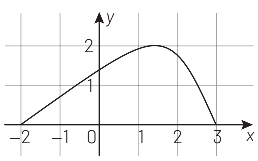
ZADATAK **4.**

Koji je od grafova graf injekcije?

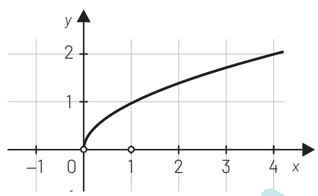
a)



b)

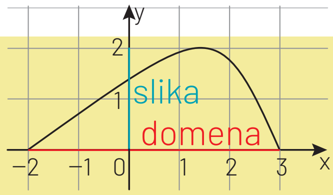


c)



Određivanje domene i slike funkcije uz pomoć grafa

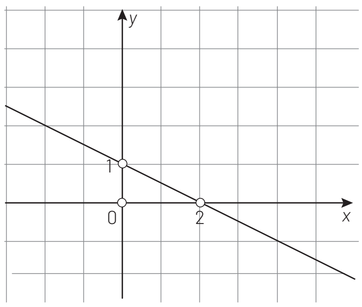
Domena funkcije jest projekcija njezina grafa na os x, a njezina je **slika** projekcija grafa na os y.



PRIMJER **4.**

Nacrtajmo graf i odredimo domenu i sliku linearne funkcije $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

Rješenje



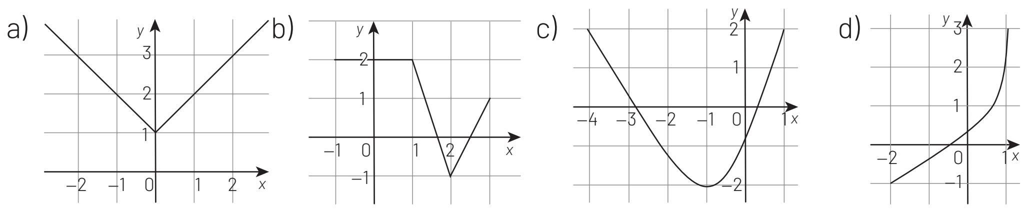
Kako je graf pravac, dovoljno je odrediti njegove dvije točke, npr. (0, 1) i (2, 0).

Projekcija pravca na os x jest cijela os, dakle domena zadane funkcije cijeli je skup $\mathbb{R}$. Isto tako, projekcija pravca na os y jest cijela os pa je slika zadane funkcije cijeli skup $\mathbb{R}$.

Općenito, domena i kodomena svake linearne funkcije je cijeli skup $\mathbb{R}$.

ZADATAK **5.**

Odredi domenu i sliku funkcija prikazanih grafom.



PRIMJER **5.**

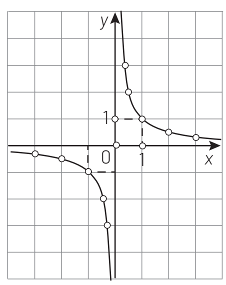
Nacrtajmo graf racionalne funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$.

Rješenje

Za navedene vrijednosti argumenta x računamo vrijednosti $y = f(x)$.

x	-100	-10	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	10	100
y	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	100	10	3	2	1	10	100	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$

Nacrtajmo točke (x, y) koje određuju graf.



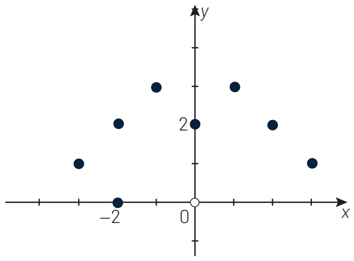
Uočimo da su sve manjim pozitivnim vrijednostima od x pridružene sve veće pozitivne vrijednosti od y (i analogno za negativne vrijednosti).

Pogledamo li projekcije grafa na koordinatne osi, uočit ćemo da je i domena i slika funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ skup $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

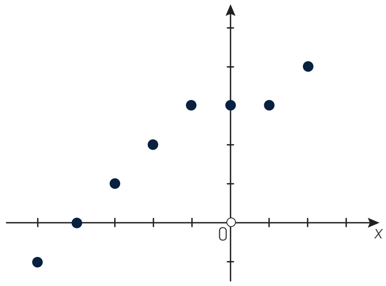
ZADATCI

6. Koji od sljedećih skupova točaka u koordinatnome sustavu prikazuje funkciju?

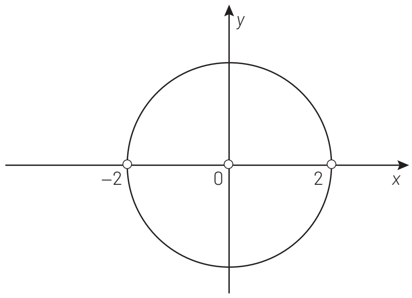
a)



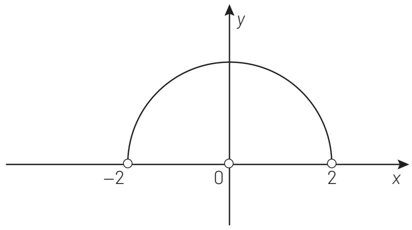
b)



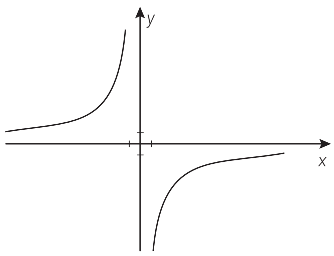
c)



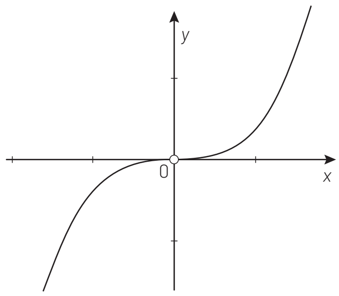
d)



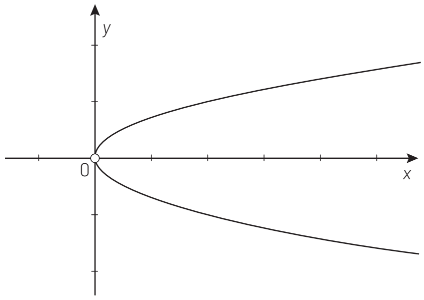
e)



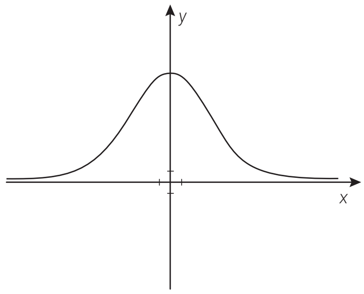
f)



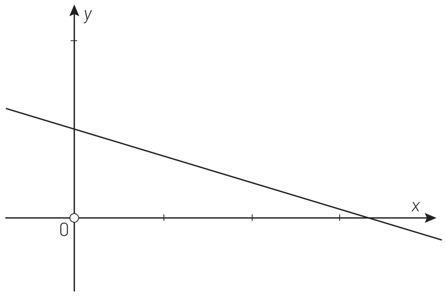
g)



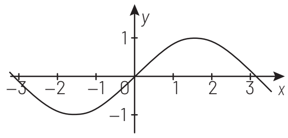
h)



i)



j)



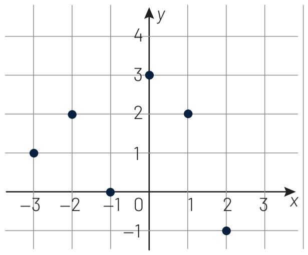
ZADATCI

7. Koji od skupova točaka iz zadatka 6. prikazuju injekciju?

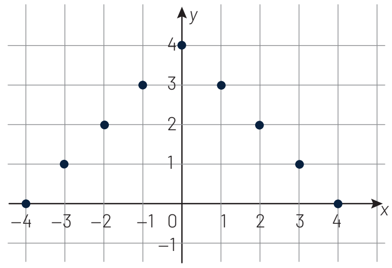
8. Nacrtaj graf funkcije $f(x)=\frac{2}{3}x-1$ ako je njezina domena interval $[-3{,}6]$. Odredi u tome slučaju sliku funkcije f.

9. Skupom točaka na slici prikazan je graf funkcije. Odredi domenu i sliku prikazane funkcije.

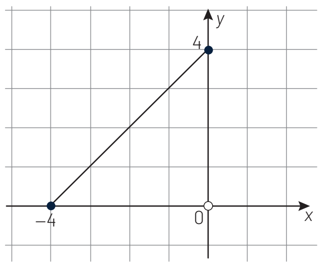
a)



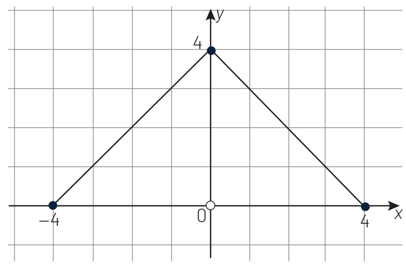
b)



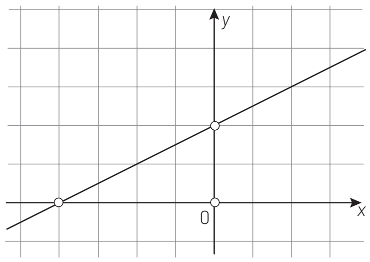
c)



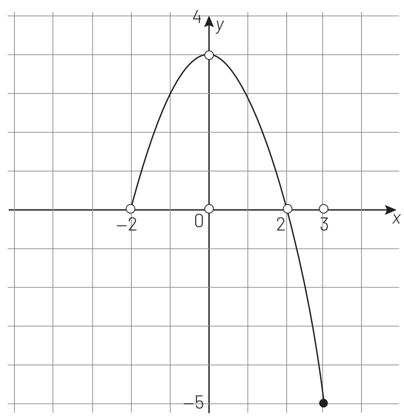
d)



e)



f)



10. Odredi vrijednost y ako točka $(-1, y)$ pripada grafu funkcije zadane jednadžbom:

a) $y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$ b) $y=-2x^2-3x-4$ c) $y=\frac{1}{x}$ d) $y=\frac{x+2}{3-x}+x$.

11. Odredi sve vrijednosti x za koje točka $(x, 4)$ pripada grafu funkcije zadane jednadžbom:

a) $y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$ b) $y=-2x^2-3x+4$ c) $y=\frac{1}{x}$ d) $y=\frac{x+2}{3-x}+x$.

KOMPOZICIJA FUNKCIJA I INVERZNA FUNKCIJA

Kompozicija funkcija

PRIMJER 1.

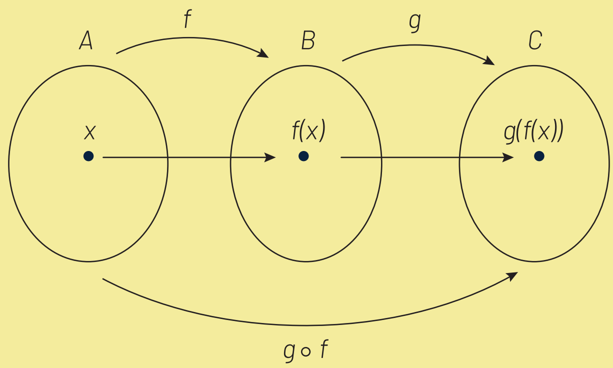
Kako kinetička energija kugle mase 2 kg, koja je s mosta bačena prema vodi s početnom brzinom od 3 m/s, ovisi o vremenu?

Rješenje

Kinetička energija kugle iznosi $K(v)=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}2v^2=v^2$. Akceleracija sile teže iznosi 9.81 m/s pa je brzina kugle $v(t)=at+v_0=9.81t+3$. Želimo li kinetičku energiju kugle izraziti kao funkciju vremena, moramo $v(t)$ uvrstiti u $K(v)$. Dobit ćemo $K(v(t))=K(9.8t+3)=(9.81t+3)^2$.

Dobivena funkcija $K(t)$ nastala je slaganjem ili kompozicijom funkcija $K(v)$ i $v(t)$.

Kompoziciju funkcija $f:A\rightarrow B$ i $g:B\rightarrow C$ označavamo s $g\circ f$ i definiramo s $(g\circ f)(x)=g(f(x))$. Kompozicija $g\circ f$ postoji ako je $f(A)\subseteq B$.



PRIMJER 2.

Ako je $f(x)=x^2$ i $g(x)=3x+2$, pronađimo $h=f\circ g$ i $k=g\circ f$.

Rješenje

Složenu funkciju $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ nalazimo tako da vrijednost funkcije $g(x)=3x+2$ uvrstimo u funkciju f umjesto x:

$$h(x)=f(g(x))=f(3x+2)=(3x+2)^2=9x^2+12x+4.$$

Analogno, složenu funkciju $k(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$ nalazimo tako da vrijednost funkcije $f(x)=x^2$ uvrstimo u funkciju g umjesto x:

$$k(x)=g(f(x))=g(x^2)=3x^2+2.$$

Uoči da je $f\circ g\neq g\circ f$!

ZADATAK

1. Ako je $f(x)=x^2+1$ i $g(x)=\sqrt{x}$, pronađi $f\circ g$ i $g\circ f$.

PRIMJER

3. Izrazimo $h(x)=(5x-1)^3$ kao kompoziciju jednostavnijih funkcija.

Rješenje

Ako stavimo $f(x)=x^3$, $g(x)=5x-1$, onda je
$h(x)=(5x-1)^3=f(5x-1)=f(g(x))=(f\circ g)(x)$, tj. $h=f\circ g$.

ZADATAK

2. Izrazi $h(x)=\sqrt{3x^2+2}$ kao kompoziciju jednostavnijih funkcija.

Inverzna funkcija

PRIMJER

4. Funkcija $y=f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ opisuje kako y ovisi o x. Pronađimo funkciju $x = g(y)$ koja opisuje kako x ovisi o y.

Rješenje

Riješimo $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ po x: $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3y=x+1\Leftrightarrow x=3y-1$. Dakle,
$x=g(y)=3y-1$.

Za funkcije f i g iz prethodnoga primjera kažemo da su inverzne funkcije.

Funkcije f i g inverzne su ako $y=f(x)$ vrijedi onda i samo onda kad vrijedi $x=g(y)$.
Inverzna funkcija od f označava se s f^{-1} i kraće se zove inverz od f.
Slika funkcije f domena je funkcije f^{-1} i slika funkcije f^{-1} domena je funkcije f.
Funkcije f i f^{-1} bijekcije su među tim skupovima.

Ako je funkcija f zadana jednadžbom $y=f(x)$, onda jednadžbu koja zadaje f^{-1} nalazimo tako da $y=f(x)$ riješimo po x. Ako je rješenje jedinstveno, onda je $x=f^{-1}(y)$.

PRIMJER

5. Nađimo inverz od $f(x)=-2x+2$.

Rješenje

Jednadžbu $y=-2x+2$ riješimo po x: $2x=-y+2\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}y+1$.

Rješenje je jedinstveno pa je $f^{-1}(y)=-\frac{1}{2}y+1$.

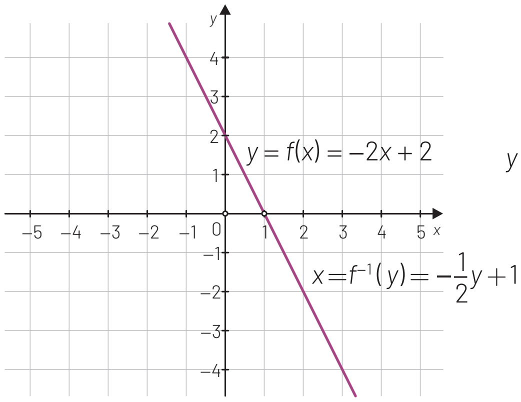
PRIMJER **6.** Nacrtajmo grafove funkcija f i f^{-1} iz prethodnog primjera.

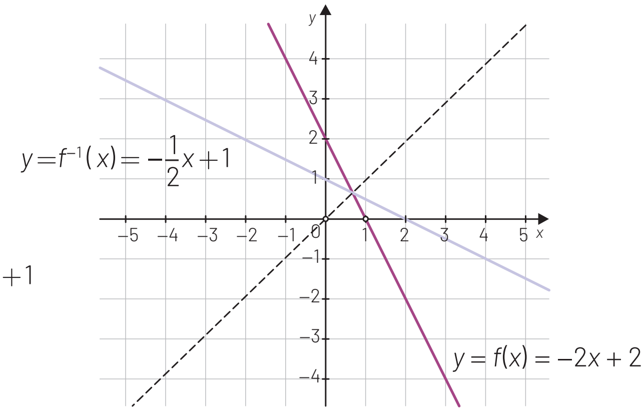
Rješenje

Jednadžbe $y = f(x) = -2x + 2$ i $x = f^{-1}(y) = -\frac{1}{2}y + 1$ ekvivalentne su pa funkcije $y = f(x)$ i $x = f^{-1}(y)$ imaju isti graf (slika lijevo).

Ako argumente od f^{-1} označimo s x, a njezine vrijednosti s y, onda je
$f^{-1}(x) = y = -\frac{1}{2}x + 1.$

Grafovi $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$ sada imaju zamijenjene uloge x-a i y-a pa jedan iz drugoga nastaju zrcaljenjem oko osi $y = x$ koje os x preslikava u os y (slika desno).

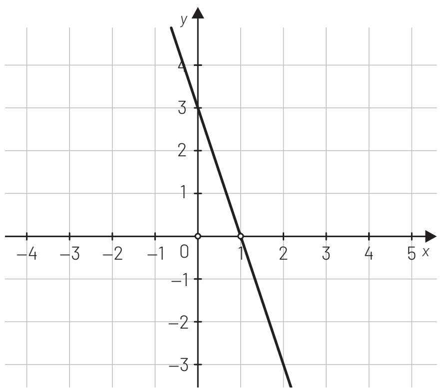




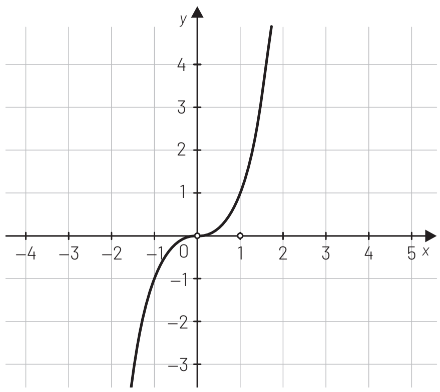
ZADATAK **3.** Pronađi inverz od $f(x) = 3x - 4$ i nacrtaj grafove od f i f^{-1}.

4. Za zadane grafove od $y = f(x)$ skiciraj grafove od $y = f^{-1}(x)$.

a)



b)



PRIMJER **7.** Za funkciju $f(x) = \frac{1}{3}x + 5$ odredi inverznu funkciju te izračunaj $(f \circ f^{-1})(x)$ i $(f^{-1} \circ f)(x)$.

Rješenje

Iz $y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow x = 3y - 15,$

pa je $f^{-1}(y) = 3y - 15$, tj. $f^{-1}(x) = 3x - 15.$

Sada je

$f \circ f^{-1}(x) = f(3x - 15) = \frac{1}{3}(3x - 15) + 5 = x,$

$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\left(\frac{1}{3}x + 5\right) = 3\left(\frac{1}{3}x + 5\right) - 15 = x.$

Općenito, za funkciju f i njoj inverznu funkciju vrijedi da je $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$.

ZADATCI

5. Ako je $f(x)=-3x-1$ i $g(x)=(1-x)^2$, odredi:

a) $f(g(1))$ b) $g(f(-2))$ c) $(g\circ f)(x)$ d) $(f\circ g)(x)$.

6. Ako je $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ i $g(x)=x^2-3$, odredi:

a) $f(g(2))$ b) $g(f(-15))$ c) $(g\circ f)(x)$ d) $(f\circ g)(x)$.

7. Odredi kompoziciju funkcija $f\circ g$ ako je

a) $f(x)=-2x,\ g(x)=\dfrac{x-4}{x+4}$ b) $f(x)=\dfrac{-2x}{5-x}-2x,\ g(x)=5x.$

8. Izračunaj $f\circ f(x)$ i $g\circ g(x)$ ako je

a) $f(x)=2x^2+4$ i $g(x)=\dfrac{2}{3}x-2$ b) $f(x)=(x-1)^2-2$ i $g(x)=\dfrac{1}{2}x+4.$

9. Odredi $g\circ f(x)$ ako je

a) $g(x)=2x$ i $f(x+2)=x^2+x+1$ b) $g(x)=2x^2+3x-1$ i $f\left(\dfrac{3}{x}\right)=\dfrac{2x-1}{x}.$

10. Zadane su funkcije $f(x)=1+x^2$ i $g(x)=|1+x|$. Izračunaj koliko je $(f\circ g)(x)$ i $(g\circ f)(x)$.

11. Riješi jednadžbu ako je $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$.

a) $f(x)=5x$ i $g(x)=2x$ b) $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$ i $g(x)=x-4$

c) $f(x)=x^2+3$ i $g(x)=x+2$ d) $f(x)=3x^2-2x$ i $g(x)=-x+1$

12. Ako je $(f\circ g)(x)=\dfrac{9}{x^2}$, $f(x)=x^2$, odredi $g(x)$.

13. Ivan radi 40-satni radni tjedan u salonu namještaja. Za to dobiva 1200 kn tjedno, plus 3 % provizije na vrijednost prodanoga namještaja iznad 15 000 kn. Pretpostavimo da je ovaj tjedan prodao dovoljno namještaja da zaradi proviziju.

a) Što opisuju funkcije $f(x)=0.03x$ i $g(x)=x-15\,000$?

b) Odredi funkciju $(f\circ g)(x)$ i $(g\circ f)(x)$. Koja od njih prikazuje Ivanovu proviziju?

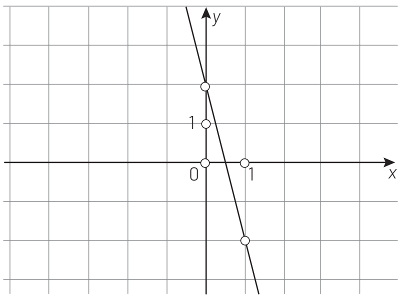
ZADATCI

14. Odredi inverz funkcije f i nacrtaj grafove funkcija f i f^{-1}.

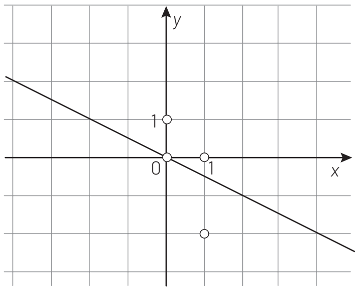
a) $f(x) = -3x$ b) $f(x) = -\frac{2}{5}x + 1$ c) $f(x) = 2x + 4$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$

15. Za zadane grafove od $y = f(x)$ skiciraj grafove od $y = f^{-1}(x)$.

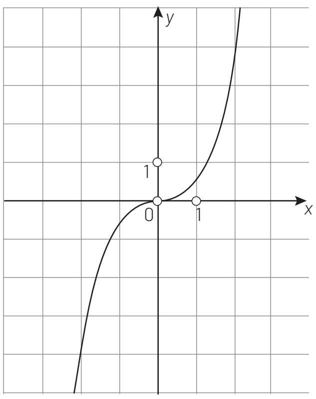
a)



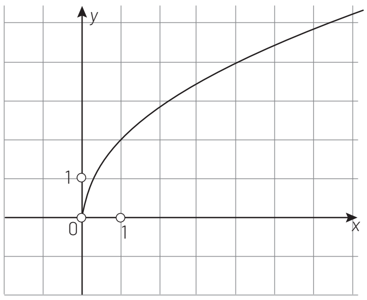
b)



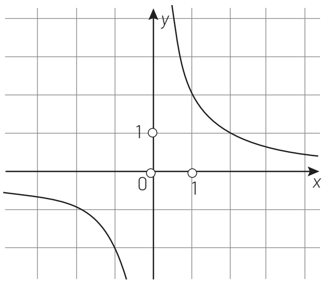
c)



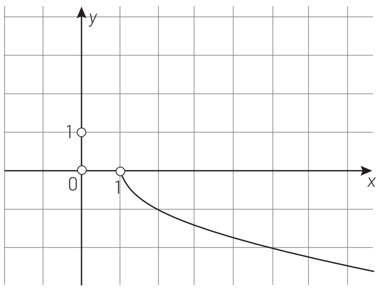
d)



e)



f)



16. Ako je $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$, koliko je $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(3)$, $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$?

17. Ako je $f(x) = -5x - 2$, koliko je $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(x)$, $f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$?

18. Započni s brojem x. → Oduzmi 2 od toga broja. → Rezultat podijeli s 3. → Dobivenom broju dodaj 1. → Konačan rezultat je broj y.

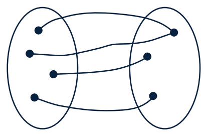
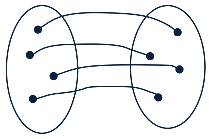
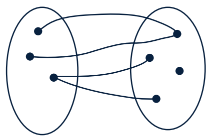
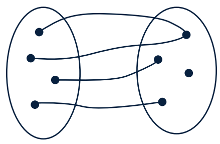
a) Odredi funkciju f koja modelira korake u zadanom algoritmu, odnosno ulaznom broju x pridruži izlazni (konačni) broj y.

b) Odredi funkciju g koja modelira povratni algoritam.

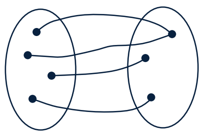
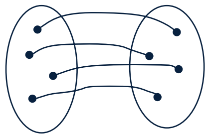
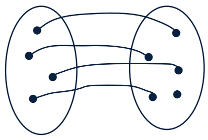
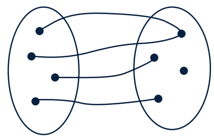
c) Dokaži da su funkcije f i g međusobno inverzne.

JESMO LI RAZUMJELI?

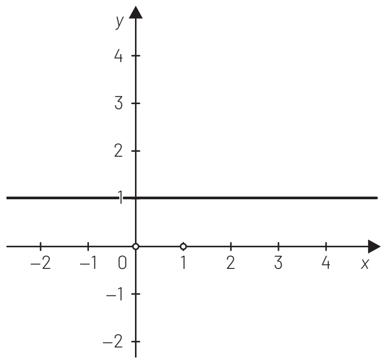
1. Koje pridruživanje nije funkcija?

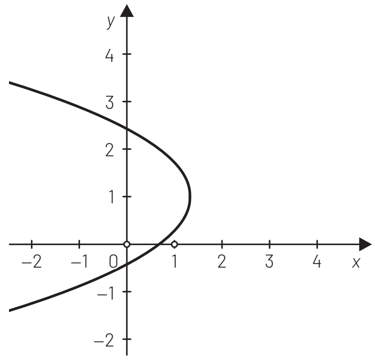
A. 
B. 
C. 
D. 

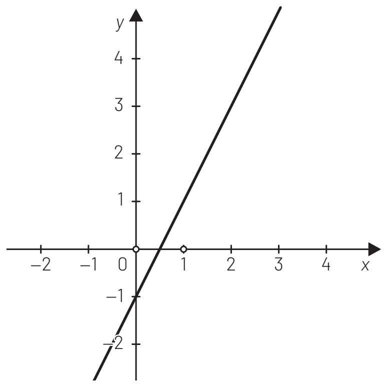
2. Koje je pridruživanje bijekcija?

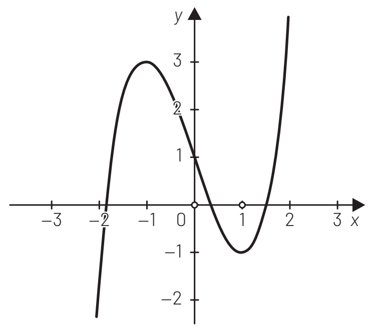
A. 
B. 
C. 
D. 

3. Koja slika ne prikazuje graf neke funkcije?

A.


B.


C.


D.


4. Koji je skup (prirodna) domena funkcije $f(x)=\sqrt{5-2x}$?

A. $\left\langle -\infty, \frac{5}{2}\right\rangle$ B. $\left\langle -\infty, \frac{5}{2}\right]$ C. $\left\langle -\infty, -\frac{5}{2}\right]$ D. $\left[\frac{5}{2}, \infty\right\rangle$

5. Koji je skup (prirodna) domena funkcije $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-16}$?

A. $\langle -4, \infty\rangle$ B. $\langle 4, \infty\rangle$ C. $\mathbb{R}\setminus\{\pm 4\}$ D. $\mathbb{R}\setminus\{4\}$

JESMO LI RAZUMJELI?

6. Koji je skup slika funkcije $f(x)=\sqrt{3+2x}-5$?

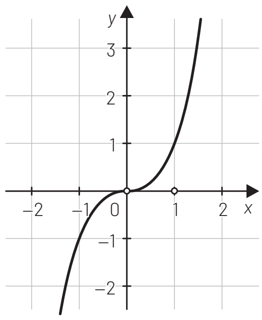
A. $\langle -5, \infty \rangle$ B. $[-5, \infty\rangle$ C. $[0, \infty\rangle$ D. $[5, \infty\rangle$

7. Koji je skup (prirodna) domena funkcije $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$?

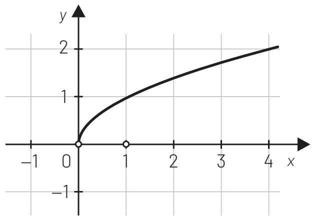
A. $\langle -1, \infty \rangle$ B. $[-1, \infty\rangle$ C. $[-1, \infty\rangle \setminus \{1\}$ D. $\langle -1, \infty\rangle \setminus \{1\}$

8. Koji graf prikazuje funkciju s najviše nultočki?

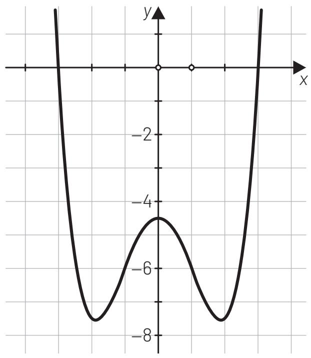
A.



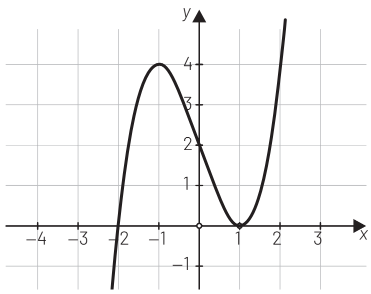
B.



C.

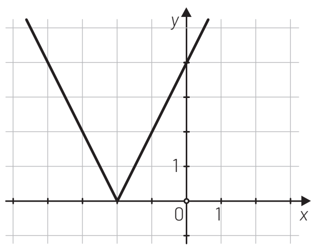


D.

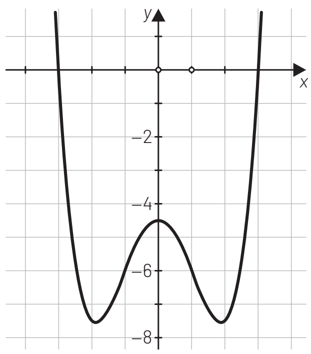


9. Koji graf prikazuje funkciju koja je bijekcija?

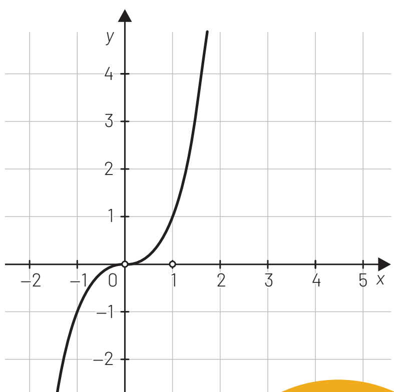
A.



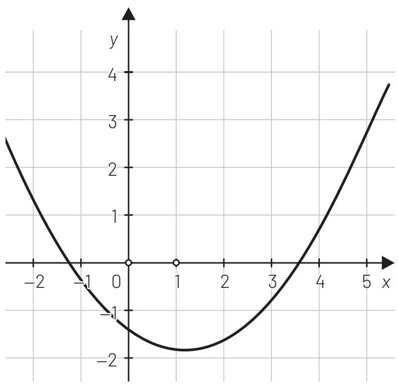
B.



C.



D.



JESMO LI RAZUMJELI?

10. Koja točka ne pripada grafu funkcije koja svakomu realnom broju pridružuje njegovu recipročnu vrijednost?

A. $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(2.5, -\frac{5}{2}\right)$ C. $(1, 1)$ D. $\left(1.5, \frac{2}{3}\right)$

11. Koja točka pripada grafu funkcije $f(x) = 2x^2 - 1$?

A. $(0, 0)$ B. $(1, -1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(0, 1)$

12. Ako je $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x - 3$ koliko je $(f \circ g)(5)$?

A. 49 B. 50 C. 51 D. 52

13. Grafovi funkcije i njoj inverzne funkcije simetrični su s obzirom na:

A. ishodište B. os x C. os y D. pravac $y = x$.

14. Ako je $f(x) = \frac{3 - x}{x + 2}$, onda je $f^{-1}(-2)$:

A. -7 B. -1 C. 1 D. 7.

15. Ako je $f(x) = 3x - 5$ i $g(x) = \frac{2}{x + 3}$ koliko je $(f \circ g)(-2) + 2x$?

A. $2x - 2$ B. $2x - 1$ C. $2x + 1$ D. $2x + 3$

16. Zadane su funkcije $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = \sqrt{3x + 7}$. Za koji realan broj x vrijedi $(g \circ f)(x) = 0$?

A. $-\frac{1}{3}$ B. 0 C. $\frac{1}{3}$ D. Realan x ne postoji.

17. Zadane su funkcije $f(x) = |2x - 1|$ i $g(x) = 3x$. Za koji realni broj vrijedi $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

A. za svaki B. niti za jedan C. za nulu D. za $\frac{1}{3}$

18. Zadana su funkcija $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 2}$. Za koji realni broj x vrijedi $(f \circ f)(x) + x = 0$?

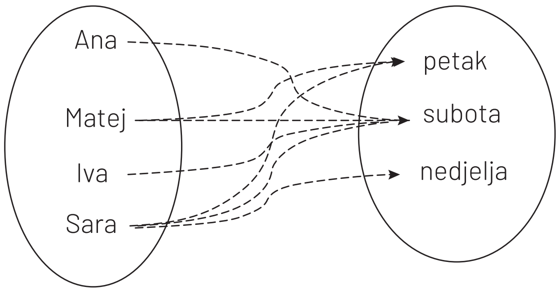
A. za svaki B. niti za jedan C. za -2 D. za $\frac{3}{2}$

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

1. U nekome je razredu 30 učenika. Jesu li sljedeća pridruživanja funkcije?

a) Svakomu učeniku u razredu pridružimo datum rođenja.
b) Svakomu mjesecu pridružimo učenike koji su rođeni u tome mjesecu.
c) Ocjenama iz testa iz matematike pridružimo učenike.
d) Svakomu učeniku pridružimo boju očiju.
e) Svakomu predmetu pridružimo učenike koji imaju ocjenu odličan.

2. Dijagram prikazuje kojim danima Ana, Matej, Iva i Sara izlaze u večernjim satima.



Je li dano pridruživanje funkcija? Obrazloži!

3. Na natjecanju iz matematike dodjeljuju se prva, druga, treća nagrada i pohvala po kriterijima danim u tablici:

nagrada	1.	2.	3.	pohvala
bodovi	49 – 50	46 – 48	43 – 45	40 – 42

Učenici koji su osvojili nagrade imali su sljedeće bodove:

učenik	Anita	Boris	Ivan	Silvija	Tena	Renata	David	Karlo
bodovi	50	49	47	45	44	42	42	40

a) Nacrtaj dijagram pridruživanja nagrada svakomu od nagrađenih učenika.
b) Je li takvo pridruživanje injektivna funkcija?
c) Odredi domenu i sliku funkcije.

4. Ako domena funkcije f ima 15 elemenata, a znamo da je f bijekcija, koliko elemenata ima slika te funkcije?

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

5. U sljedećoj su tablici prikazane cijene jedne dionice u kunama po radnim danima:

dan (x)	1	2	3	4	5
cijena $f(x)$	35	34.5	34	35	36.5

Ako skup radnih dana označimo s A, a skup pripadajućih cijena s B, odredi (i obrazloži):

a) Je li pridruživanje $f: A \to B$ funkcija?

b) Je li pridruživanje $f: A \to B$ injekcija?

c) Je li pridruživanje $f: A \to B$ surjekcija?

d) Je li pridruživanje $f: A \to B$ bijekcija?

6. Odredi funkciju koja opisuje ovisnost:

a) površine o duljini stranice jednakostraničnoga trokuta

b) opsega kruga o duljini polumjera

c) prevaljenoga puta o vremenu kod jednolikoga gibanja po pravcu

d) gravitacijske potencijalne energije tijela mase m o visini na kojoj se nalazi.

7. a) Odredi funkciju kojoj je domena interval $[1, 4]$ i koja elementima domene pridružuje njihov trokratnik umanjen za 2.

b) Odredi sliku te funkcije.

c) Nacrtaj graf te funkcije ako je domena cijeli skup realnih brojeva.

d) Odredi inverznu funkciju funkcije iz zadatka pod c).

8. a) Odredi funkciju koja realni broj uvećan za 3 dijeli s 4.

b) Izračunaj $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3t-3)$, $f\left(\frac{t-1}{2}\right)$.

b) Odredi sliku te funkcije.

c) Nacrtaj graf te funkcije.

d) Odredi inverznu funkciju zadane funkcije.

9. a) Odredi funkciju $f(x)$ koja od trećine realnoga broja x oduzima broj 2.

b) Izračunaj $f(-3)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(2t+3)$, $f\left(\frac{3+t}{2}\right)$.

c) Za koji je x vrijednost funkcije 0?

d) Odredi inverznu funkciju zadane funkcije.

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

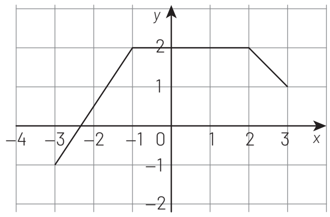
10. a) Odredite funkciju $f(x)$ koja kvadratu realnoga broja dodaje trokratnik toga broja i dopunite tablicu.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$									

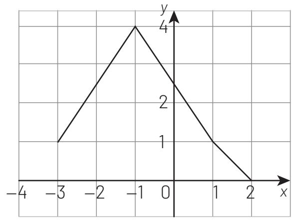
b) Je li ta funkcija injekcija?

11. Odredi domenu i sliku funkcija prikazanih grafom.

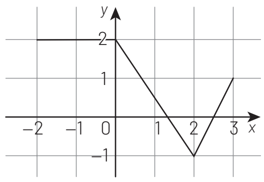
a)



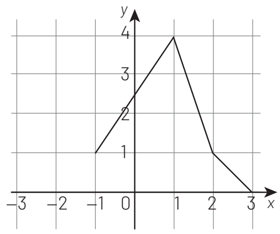
b)



c)



d)



12. Odredi prirodnu domenu zadane funkcije.

a) $f(x)=\dfrac{2+x}{5}$ b) $f(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$ c) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$ d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{6-x}{5}}$

e) $f(x)=\sqrt{3x-2}$ f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-3}$ g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-5}}{x^2-9}$ h) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{3x+6}}$

13. Ako je $f(x-2)=\dfrac{3+x}{x-1}$, odredi:

a) $f(x)$ b) $f(5)$ c) $f(5x+4)$ d) $f\left(\dfrac{x+2}{x-5}\right)$.

14. Ako je $f\left(\dfrac{x}{x+3}\right)=\dfrac{3+x}{x+1}$, odredi:

a) $f(x)$ b) $f(4)$ c) $f(2x+4)$ d) $f\left(\dfrac{2x}{x+3}\right)$.

15. Za funkcije $f(x)=5x-\dfrac{1}{2}$ i $g(x)=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{3}{2}$ odredi:

a) $(f\circ f)(x)$ b) $(g\circ g)(x)$ c) $(f\circ g)(x)$ d) $(g\circ f)(x)$

e) $f^{-1}(x)$ f) $g^{-1}(x)$ g) $(f^{-1}\circ g)(x)$ h) $(f\circ g^{-1})(x)$.

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

16. Za funkcije $f(x)=\dfrac{x+1}{2-x}$ i $g(x)=4x-1$ odredi:

a) $(f\circ f)(x)$ b) $(g\circ g)(x)$ c) $(f\circ g)(x)$ d) $(g\circ f)(x)$

e) $f^{-1}(x)$ f) $g^{-1}(x)$ g) $(f^{-1}\circ g)(x)$ h) $(f\circ g^{-1})(x)$.

17. Zadane funkcije prikaži kao kompoziciju jednostavnijih funkcija:

a) $f(x)=\sqrt{3x+2}$ b) $f(x)=(3x-2)^2$ c) $f(x)=\left(\dfrac{3}{2}x-2\right)^3$ d) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$

e) $f(x)=|5x+6|$ f) $f(x)=2|x|+3$ g) $f(x)=\dfrac{3}{|x+6|}$ h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$.

18. Popuni prazna bijela polja u tablici:

a)

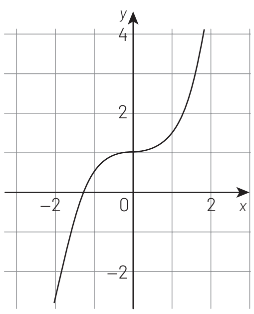
x	1	2	3	4	6	8
$f(x)$	2	4		8		
$g(x)$					7	9
$(g\circ f)(x)$	3	5	7			

b)

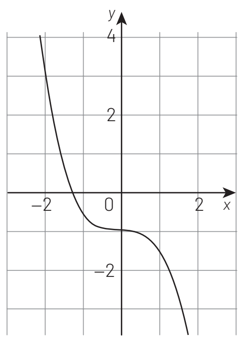
x	1	2	3	4	5	7
$f(x)$	1	3		7		
$g(x)$			7		13	19
$(g\circ f)(x)$	1		13			

19. Nacrtaj graf $y=f^{-1}(x)$ inverzne funkcije za funkciju čiji je graf $y=f(x)$ na slici.

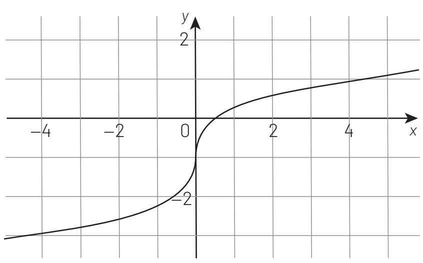
a)



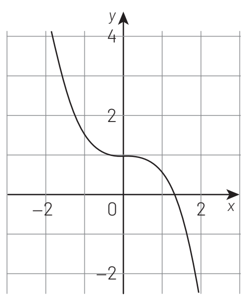
b)



c)



d)



ZADATCI ZA PONAVLJANJE

20. Od jedne ste *online* trgovine dobili kupon za 50 kuna popusta pri sljedećoj kupnji. Kad ste ga htjeli iskoristiti, uočili ste da vaš omiljeni brend s odjećom ima sniženje od 30 %.

a) Napišite funkciju $f(x)$ koja opisuje kako će na cijenu komada odjeće x utjecati dobiveni kupon (bez sniženja od 30 %).

b) Napišite funkciju $g(x)$ koja opisuje kako će na cijenu komada odjeće x utjecati popust od 30 % (bez upotrebe kupona).

c) Odredite kompoziciju dobivenih funkcija koja će računati konačnu cijenu komada odjeće ako najprije iskoristite popust od 30 %, a zatim kupon.

d) Odredite kompoziciju dobivenih funkcija koja će računati konačnu cijenu komada odjeće ako najprije iskoristite kupon, a zatim popust od 30 %.

21. Renovirate kuću i krenuli ste u nabavu, no kako vaš automobil nije dovoljno velik za sve kupljene stvari, dogovorili ste u trgovini dostavu uz malu naknadu. Stoga će na vašem računu pisati neto cijena kupljene robe, PDV od 25 % te 80 kn za dostavu.

a) Što računa funkcija $f(x) = 1.25x$, a što funkcija $g(x) = x + 80$ za neto cijenu robe x?

b) Koliko je $f(2000)$ i $g(f(2000))$? Obrazloži dobiveni rezultat.

c) Koja funkcija računa konačan iznos računa za neto vrijednost robe x?

RJEŠENJA

3. FUNKCIJE

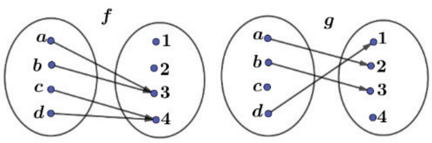
POJAM FUNKCIJE

1. Im (f) = {a, b, d} Im (h) = {a, b, c, d}

2. a) v, z **b)** u, v **c)** v

3. f i g

4. f je funkcija a g nije

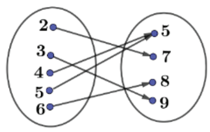


5. a) 7 **b)** 6 **c)** $f(2) = 3$ $f(6) = 5$ **d)** ne postoji jer broj 3 nije u domeni funkcije f **e)** (2 3) tri su takva uređena para **f)** f je bijekcija jer je injekcija i surjekcija

6. Pridruživanje je funkcija ako je svaki učenik izabrao samo jednu slobodnu aktivnost.

7. a) funkcija jer se svakom čovjeku može pridružiti samo jedna visina **b)** nije funkcija jer ne mora svaki učenik imati kućnog ljubimca **c)** funkcija jer svakom se danu u jednoj godini može izmjeriti i pridružiti prosječna dnevna temperatura **d)** nije funkcija jer nekoj temperaturi može biti pridruženo više dana

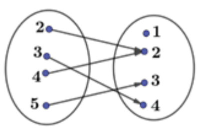
8. a) D (f) = {2, 3, 4, 5, 6} **b)** Im (f) = {5, 7, 8, 9} **c)**



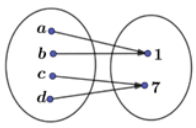
9.

	f	g	h	i
injekcija	+	–	+	–
bijekcija	+	–	–	–
surjekcija	+	–	–	+

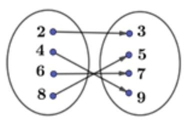
10. a)



b)



c)



REALNE FUNKCIJE

1. $f(-2) = 2$, $f(t+3) = t^2 + 7t + 12$, $f(p^2) = p^4 + p^2$

2. $g\,(2) = -2$, $g\,(t-2) = \dfrac{t-2}{3-t}$, $g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x-1}$

3. a) $\mathbb{R}$ **b)** $\left[-5, \infty\right\rangle$ **c)** $\{3\}$ **d)** $\left\langle 4, \infty\right\rangle$ **e)** $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ **f)** $\mathbb{R}$

4. $h\,(x) = \dfrac{x-1}{3-x}$

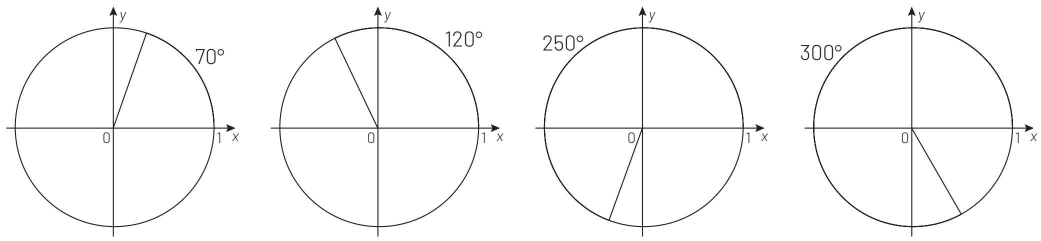
5. $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

TRIGONOMETRIJSKI OMJERI

Svaki rezultat koji dobijemo na kalkulatoru, npr. $x = 2.3015$, jest približan pa takvu jednakost uvijek treba razumjeti kao približnu jednakost (na zadnju zapisanu decimalu).

U prvome razredu definirali smo trigonometrijske omjere $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ za šiljaste kutove pravokutnoga trokuta, tj. za $0° < \alpha < 90°$. Te ćemo definicije proširiti na kutove $0° \leq \alpha \leq 360°$.

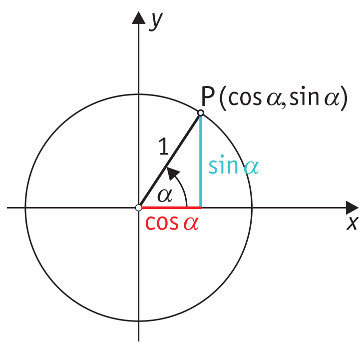
Svaki kut α, za $0° \leq \alpha \leq 360°$ možemo predstaviti točkom na jediničnoj kružnici pravokutnoga koordinatnog sustava. Ta točka predstavlja kut kojemu je jedan krak pozitivni dio osi x, a drugi je polupravac koji kreće iz ishodišta i prolazi tom točkom.



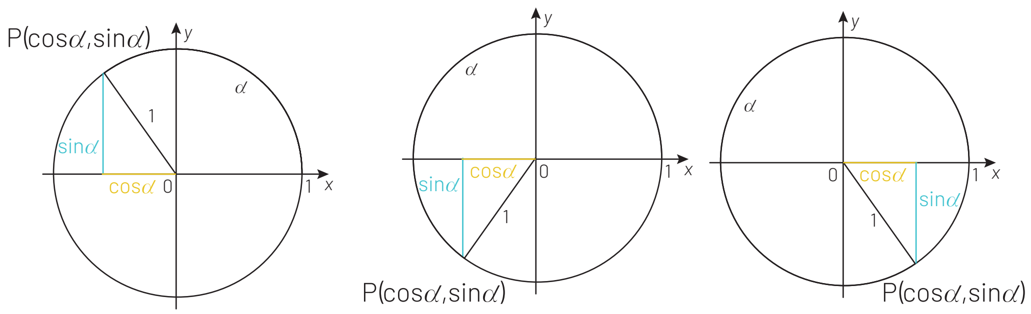
Sinuse i kosinuse definiramo kao omjere u pravokutnome trokutu:

$$\cos\alpha = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}, \sin\alpha = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

Iz pravokutnoga trokuta na desnoj slici vidimo da je $\cos\alpha$ apscisa točke P, a $\sin\alpha$ ordinata te točke.



Tako određujemo sinus i kosinus za sve točke na jediničnoj kružnici, u bilo kojemu kvadrantu:



Trigonometrijske omjere $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$ definiramo kao apscisu x i ordinatu y točke koja predstavlja taj kut na jediničnoj kružnici.

Trigonometrijske omjere $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ definiramo kao i prije:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ (uočimo da je } \operatorname{ctg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x}.\text{)}$$

Uočite da je $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, za svaki α.

Jediničnu kružnicu zbog važnosti za trigonometriju zovemo i **trigonometrijskom kružnicom**.

PRIMJER

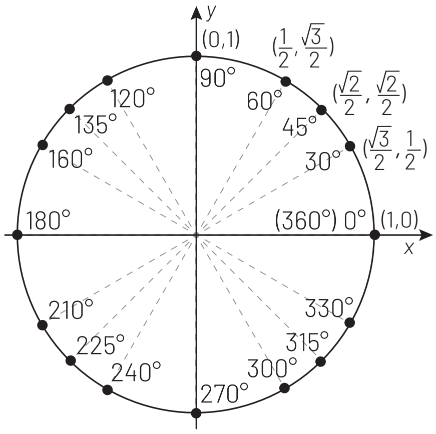
1. Izračunajmo sinus, kosinus, tangens i kotangens kutova od:

0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°

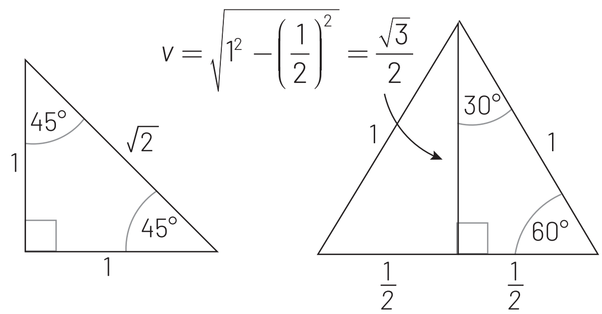
150°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°, 360°.

Rješenje

Najprije sve zadane kutove predstavimo točkama na trigonometrijskoj kružnici i izračunamo njihove koordinate za 0°, 30°, 45°, 60° i 90°.



Za 0° i 90° one su očite, a za 30°, 45° i 60° izračunamo ih kao u 1. razredu:

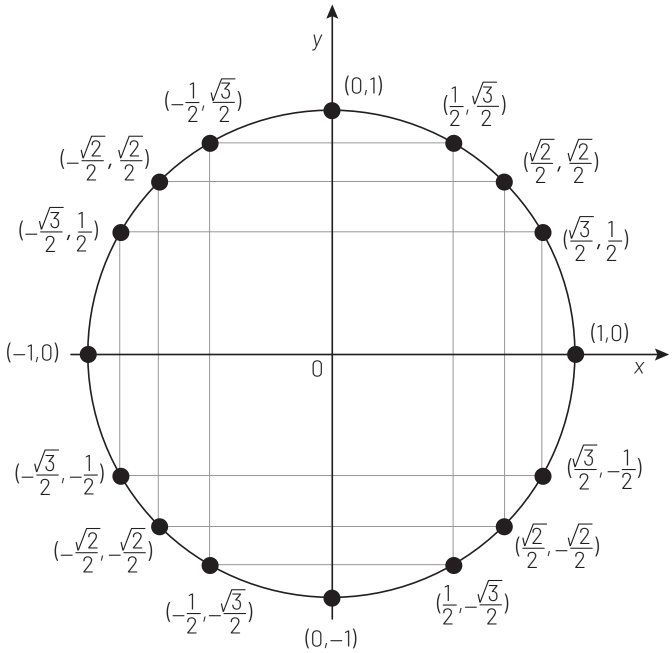


$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dakle, odredili smo sljedeće vrijednosti kosinusa i sinusa, a njihove tangense i kotangense nalazimo dijeljenjem; n. d. znači da vrijednost nije definirana (jer ne možemo dijeliti s 0):

α	0°	30°	45°	60°	90°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n. d.
ctg	n. d.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Koristeći se paralelama koje povezuju točke jednakih x- ili y-koordinata, sada lako nalazimo koordinate točaka u preostalim kvadrantima.



Te su koordinate kosinusi i sinusi odgovarajućih kutova u preostalim kvadrantima, a njihove tangense i kotangense nalazimo dijeljenjem:

α	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tg	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n. d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	n. d.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	n. d.

Primijetite da sve vrijednosti bolje vidimo na trigonometrijskoj kružnici nego u tablicama (koje nikako ne treba pamtiti). Dovoljno je znati koordinate istaknutih točaka (30°, 45°, 60°) u I. kvadrantu. Budući da se radi samo o tri lako pamtljive vrijednosti $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, njihove koordinate možete lako odrediti:

Točka koja predstavlja 45° nalazi se na simetrali I. kvadranta i ima jednake koordinate $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

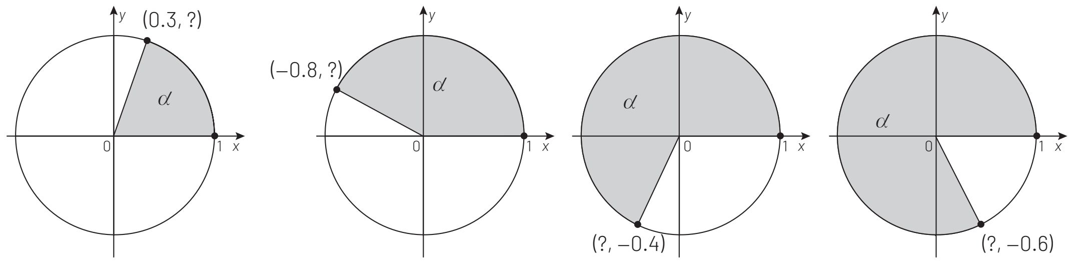
Točka koja predstavlja 30° ima x veći od y i ima koordinate $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Točka koja predstavlja 60° ima x manji od y i ima koordinate $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Naravno, prve su koordinate kosinusi, a druge sinusi odgovarajućih kutova.

ZADATAK

1. Na trigonometrijskoj kružnici zadan je kut α i jedna koordinata njemu pridružene točke. Odredi drugu koordinatu i vrijednosti trigonometrijskih omjera kuta α.



2. Odredi predznake sinusa, kosinusa, tangensa i kotangensa kuta od:

a) 58° b) 127° c) 245° d) 320°.

3. Na trigonometrijskoj kružnici označi kutove α kojima je:

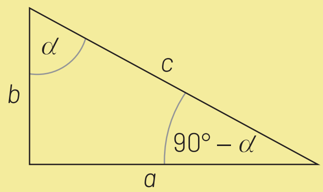
a) $\sin\alpha = 0.6$ b) $\cos\alpha = -0.3$ c) $\sin\alpha = -0.4$ d) $\cos\alpha = 0.5$.

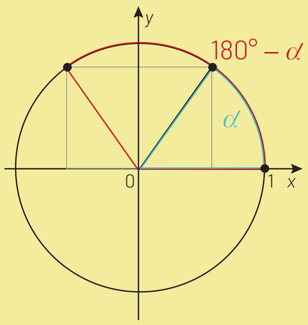
4. Na trigonometrijskoj kružnici označi kutove α ako je:

a) α u II. kvadrantu i $\sin\alpha = 0.2$ b) α u III. kvadrantu i $\cos\alpha = -0.4$
c) α u IV. kvadrantu i $\sin\alpha = -0.4$ d) α u I. kvadrantu i $\cos\alpha = 0.5$.

U 1. razredu naučili smo da vrijede lijeve formule iz donjega okvira, a s trigonometrijske kružnice lako očitavamo da vrijede i desne formule:

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.





ZADATAK

5. Ako je $\sin\alpha = 0.2$ koliko je:

a) $\sin(180^\circ - \alpha)$ b) $\sin(90^\circ - \alpha)$?

Džepno računalo

Vrijednosti trigonometrijskih omjera kuta jednostavno možemo odrediti džepnim računalom (kalkulatorom).

Kako se u nastavku ove teme bavimo određivanjem elemenata trokuta, radi jednostavnosti ćemo se ograničiti na kutove u stupnjevima iz intervala $\langle 0°, 180° \rangle$.

Važno: Sve vrijednosti sinusa i kosinusa iz intervala su $[-1, 1]$ i rezultate zaokružujemo na najmanje 4 decimale.

Tipkom **DRG** (ili SETUP 3 ili OPTION/ANGLE) biramo na kalkulatoru opciju DEG (engl. *degrees* – stupnjevi).

PRIMJER 2.

Izračunajmo džepnim računalom:

a) $\sin 38.4°$ b) $\text{ctg}\, 22°45'$.

Rješenje

a) SIN 38.4

SIN (38.4)
0.6211477803

b) TAN 22 °'" 45 X⁻¹

TG 22 °'" 45 X⁻¹

TG⁻¹ (22°'" 45°'")
2.384729328

Kalkulator ne sadrži tipku ctg, pa koristimo vezu $\text{ctg}x = \dfrac{1}{\text{tg}x}$

ZADATAK 6.

Izračunaj džepnim računalom:

a) $\sin 95°45'$ b) $\cos 58.55°$ c) $\text{tg}\, 32°15'25''$ d) $\text{ctg}\, 71°5'$.

Iz zadane vrijednosti trigonometrijskih omjera nekoga kuta tipkom **SHIFT** (ili INV) pa tipkom **sin**, **cos** ili **tan** možemo odrediti taj kut.

PRIMJER 3.

Odredimo kut α ako je:

a) $\sin\alpha = 0.3238$ b) $\cos\alpha = 0.8521$ c) $\text{ctg}\alpha = 1.55$.

Rješenje

a) SHIFT SIN 0.3238

SIN⁻¹ (0.3238)
18.8928892

b) SHIFT COS 0.8521

COS⁻¹ (0.8521)
31.55918309

$\alpha = 31.56°$ ili tipkom °'" dobijemo $\alpha = 31°33'33''$

c) SHIFT TAN 1.55 X⁻¹

TAN⁻¹ (1.55)
32.82854189

$\alpha = 32.83° = 32°50'$.

U intervalu $\langle 0°, 180° \rangle$ dva su kuta s istim sinusom: $\alpha_1 = 18.89°$ i $\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 161.11°$.

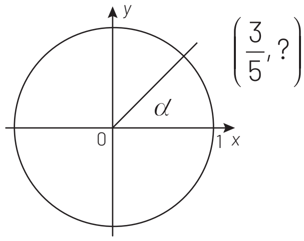
ZADATAK 7.

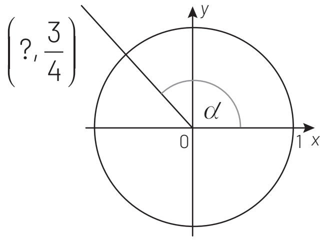
Odredi kut α ako je:

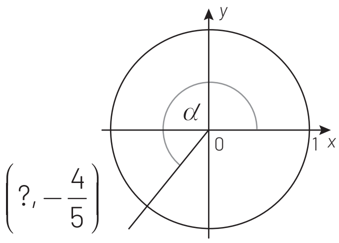
a) $\sin\alpha = 0.5435$ b) $\cos\alpha = -0.7365$ c) $\text{tg}\alpha = 2.65$ d) $\text{ctg}\alpha = 3.285$.

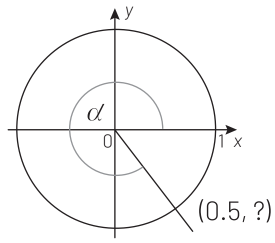
ZADATCI

8. Na trigonometrijskoj kružnici zadan je kut α i jedna koordinata njemu pridružene točke. Odredi drugu koordinatu i vrijednosti trigonometrijskih omjera kuta α.

a) 

b) 

c) 

d) 

9. U kojemu je kvadrantu točka kojom je predstavljen kut α ako vrijedi:

a) $\sin\alpha > 0$ i $\cos\alpha < 0$ b) $\sin\alpha < 0$ i $\cos\alpha > 0$ c) $\sin\alpha < 0$ i $\text{tg}\,\alpha < 0$?

10. Odredi predznake trigonometrijskih funkcija kuta:

a) $88°$ b) $27°$ c) $200°$ d) $350°$
e) $92°$ f) $156°$ g) $188°$ h) $359°$.

11. Na trigonometrijskoj kružnici označi kutove α kojima je:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ b) $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ c) $\sin\alpha = -0.4$ d) $\cos\alpha = 0.5$.

12. Na trigonometrijskoj kružnici označi kutove α ako je:

a) α u I. kvadrantu i $\sin\alpha = 0.7$ b) α u II. kvadrantu i $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$
c) α u III. kvadrantu i $\sin\alpha = -0.1$ d) α u IV. kvadrantu i $\cos\alpha = 0.25$.

13. Ako je $\cos\alpha = -\frac{5}{12}$, koliko je:

a) $\cos(180° - \alpha)$ b) $\cos(90° - \alpha)$?

14. Izračunaj džepnim računalom:

a) $\sin 25.75°$ b) $\cos 102.6°$ c) $\sin 36°55'$ d) $\sin 88°44'22''$
e) $\text{tg}\, 62°30'$ f) $\text{tg}\, 73°5'40''$ g) $\text{ctg}\, 15.65°$ h) $\text{ctg}\, 81°18'$.

15. Odredi kut α ako je:

a) $\sin\alpha = 0.7531$ b) $\cos\alpha = 0.1234$ c) $\sin\alpha = \frac{11}{13}$ d) $\cos\alpha = -0.5535$
e) $\text{tg}\,\alpha = 1.65$ f) $\text{tg}\,\alpha = \frac{22}{9}$ g) $\text{ctg}\,\alpha = 0.935$ h) $\text{ctg}\,\alpha = \frac{5}{8}$.

POUČAK O SINUSIMA

Trebamo li odrediti nepoznate stranice ili kutove trokuta, kažemo da „rješavamo" trokut.

Do sad smo rješavali pravokutni trokut. U ovome ćemo poglavlju naučiti kako možemo riješiti bilo kakav trokut.

Iz poučaka o sukladnosti trokuta znamo da je trokut jednoznačno određen sa:

a) jednom stranicom i dvama kutovima (poučak KSK)
b) dvjema stranicama i kutom među njima (poučak SKS)
c) dvjema stranicama i kutom nasuprot većoj od njih (poučak SSK)
d) svim trima stranicama (poučak SSS).

Pogledajmo kako možemo povezati duljine stranica i sinuse kutova nasuprot njima.

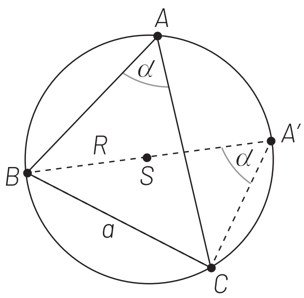
Napomena. U trokutu ABC koristimo se uobičajenim oznakama: mjera kuta u vrhu A jest α, mjera kuta u vrhu B jest β, a mjera kuta u vrhu C jest γ; duljine stranica jesu $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$.

Opišimo oko trokuta ABC kružnicu i promotrimo obodni kut s vrhom u A' kojemu jedan krak prolazi središtem kružnice i vrhom B, a drugi vrhom C trokuta ABC. Mjera toga kuta jednaka je mjeri kuta trokuta u vrhu A (zašto?). Trokut $A'BC$ pravokutan je (zašto?) pa imamo:

Poučci o sinusu i kosinusu nastali su s ciljem primjene u astronomiji. Njihova se upotreba od tada proširila na razna druga područja: arhitekturu, građevinarstvo, geodeziju, strojarstvo, elektrotehniku itd.

$$\sin\alpha=\frac{a}{2R} \Rightarrow 2R=\frac{a}{\sin\alpha},$$

gdje je R polumjer opisane kružnice.



Na jednak način nalazimo $2R=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ pa konačno imamo: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.

Dobivene jednakosti omjera duljine stranice i sinusa nasuprotnoga kuta nazivamo *poučak o sinusima*.

POUČAK O SINUSIMA

U svakome je trokutu omjer duljine stranice i sinusa nasuprotnoga kuta jednak za sve stranice:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

$$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$$

PRIMJER **1.** Odredimo nepoznate duljine stranica, kut i polumjer trokutu *ABC* opisane kružnice ako je zadano $c = 14$ cm, $\alpha = 62°$ i $\beta = 74°$.

Rješenje

Odredimo treći kut trokuta: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 44°$.

Polumjer opisane kružnice dobijemo iz: $2R = \frac{c}{\sin\gamma}$, $R = \frac{c}{2\sin\gamma} \approx 10.1$ cm.

Iz poučka o sinusima imamo:

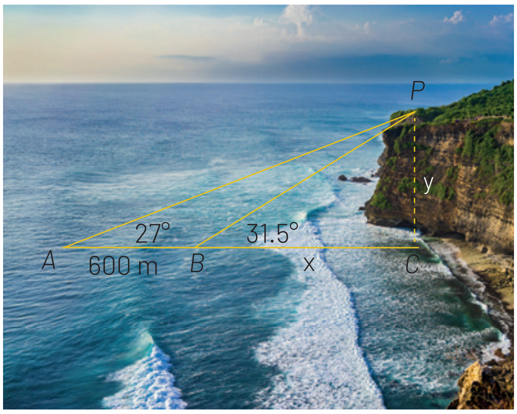
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} \approx 17.8 \text{ cm i } \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} \approx 19.4 \text{ cm}$$

ZADATAK **1.** Kružnici polumjera 6 cm upisan je trokut s kutovima $\alpha = 50°$ i $\beta = 75°$. Koliki je opseg toga trokuta?

2. Odredi nepoznate elemente trokuta *ABC* ako je zadano:

a) $a = 12$ cm, $\beta = 65°$ i $\gamma = 75°$ b) $a = 10$ cm, $\alpha = 46°$ i $\beta = 100°$.

PRIMJER **2.** Iz točke *A* vrh stijene vidi se pod kutom elevacije 27°. Kada dođemo u točku *B*, 600 m bliže stijeni, njezin se vrh vidi pod kutom elevacije 31.5°. Odredimo visinu stijene i udaljenost točke *B* od nje.



Rješenje

U trokutu *ABP* poznato je:

$\angle A = 27°$, $\angle B = 180° - 31.5° = 148.5° \Rightarrow \angle P = 31.5° - 27° = 4.5°$.

Iz poučka o sinusima slijedi: $\frac{600}{\sin 4.5°} = \frac{|PB|}{\sin 27°} \Rightarrow |PB| = \frac{600 \cdot \sin 27°}{\sin 4.5°} \approx 3471.8$ m.

Trokut *BPC* pravokutan je pa vrijedi:

$$\cos 31.5° = \frac{x}{|PB|} \Rightarrow x = |PB| \cdot \cos 31.5° \approx 2960.2 \text{ m},$$

$$\sin 31.5° = \frac{y}{|PB|} \Rightarrow y = |PB| \cdot \sin 31.5° \approx 1814 \text{ m}.$$

ZADATAK **3.** Iz točke *A* na moru vidi se vrh svjetionika pod kutom $\alpha = 11°19'$, a iz točke *B* koja je za 52.7 m bliže vidi se vrh pod kutom $\beta = 30°48'$. Kolika je visina svjetionika?

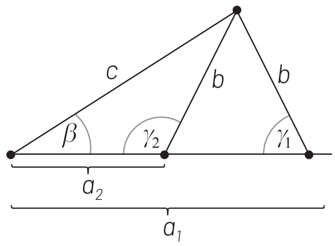
Ako su u trokutu zadane dvije stranice i kut nasuprot manjoj od njih, trokut nije jednoznačno određen. Takav slučaj imamo u sljedećem primjeru.

PRIMJER **3.**

Odredimo nepoznate elemente trokuta ABC ako je $\beta = 32°$, $b = 10$ cm i $c = 15$ cm.

Rješenje

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b} \approx 0.7949$



Imamo dvije mogućnosti za kut γ:

$\gamma_1 \approx 52°39'$ i $\gamma_2 \approx 180° - 52°39' \approx 127°21'$.

$\beta + \gamma_1 \approx 84°39' < 180°$ i $\beta + \gamma_2 \approx 159°21' < 180°$,

pa postoje dva trokuta sa zadanim elementima.

1. slučaj: $\alpha_1 \approx 180° - (\beta + \gamma_1) \approx 95°21'$

$\frac{a_1}{\sin\alpha_1} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a_1 = \frac{b \cdot \sin\alpha_1}{\sin\beta} \approx 18.79$ cm

2. slučaj: $\alpha_2 \approx 180° - (\beta + \gamma_2) \approx 20°39'''$

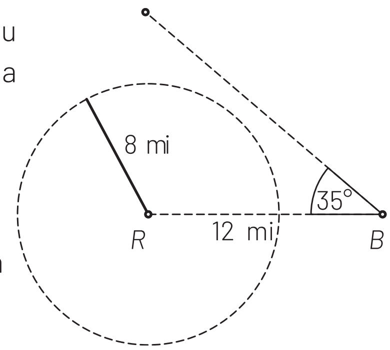
$\frac{a_2}{\sin\alpha_2} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a_2 = \frac{b \cdot \sin\alpha_2}{\sin\beta} \approx 6.65$ cm.

ZADATAK **4.**

Odredi nepoznate elemente trokuta ako je poznato: $\gamma = 40°$, $c = 20$ m i $a = 15$ m.

PRIMJER **4.**

Radarska stanica R udaljena je 12 mi od broda B u trenutku kada brod kreće pod kutom 35° u odnosu na pravac brod – radarska stanica (kako pokazuje slika).

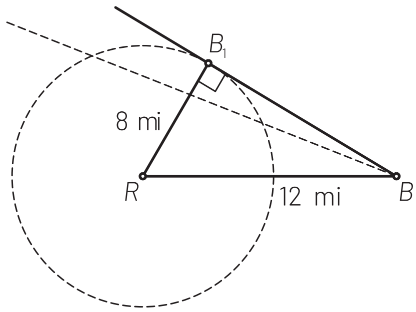


a) Ako je domet radara 8 mi, hoće li brod tijekom plovidbe biti zamijećen na radaru?

b) Koliko će daleko od polazne točke biti brod kada ga radar prvi put detektira?

Rješenje

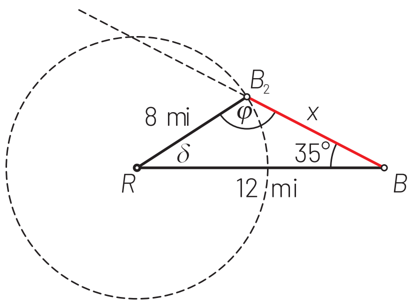
a) Brod će biti detektiran ako mu je putanja unutar pravokutnoga trokuta B_1RB.



$\sin\angle B_1BR = \frac{8}{12} \Rightarrow \angle B_1BR \approx 41°48'37''$.

Budući da se brod kreće pod kutom $35° < 41°48'37''$, bit će detektiran na radaru.

b) U trokutu B_2RB vrijedi:



$\frac{8}{\sin 35°} \approx \frac{12}{\sin\varphi} \Rightarrow \sin\varphi \approx 0.8604$,

$\varphi_1 \approx 59°21'$ i $\varphi_2 \approx 180° - 59°21' \approx 120°39'$.

Trokut je tupokutan, pa je $\varphi = 120°39'$.

$\delta \approx 180° - (35° + 120°39') \approx 24°21'$.

$\frac{x}{\sin 24°21'} \approx \frac{8}{\sin 35°} \Rightarrow x \approx 5.75$ mi.

U trenutku kada ga radar prvi put detektira, brod će biti 5.75 mi udaljen od polazne točke.

ZADATCI

5. Odredi nepoznate elemente trokuta ABC ako je poznato:

a) $a = 15$ cm, $\alpha = 50°$, $\beta = 35°$
b) $a = 25$ cm, $\alpha = 40°$, $\gamma = 55°$
c) $b = 35$ cm, $\alpha = 44°$, $\beta = 25°$
d) $b = 22$ cm, $\beta = 58°$, $\gamma = 65°$
e) $c = 5$ cm, $\alpha = 55°$, $\gamma = 45°$
f) $c = 26$ cm, $\beta = 38°$, $\gamma = 25°$
g) $a = 45$ cm, $\beta = 25°$, $\gamma = 85°$
h) $b = 44$ cm, $\alpha = 66°$, $\gamma = 75°$.

6. Odredi nepoznate elemente trokuta ABC ako je poznato:

a) $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $\beta = 76°$
b) $a = 19$ cm, $c = 22$ cm, $\gamma = 40°$
c) $b = 43$ cm, $c = 33$ cm, $\beta = 39°$
d) $a = 19$ cm, $b = 15$ cm, $\alpha = 57°$
e) $a = 6$ cm, $c = 8$ cm, $\alpha = 44°$
f) $b = 7$ cm, $c = 9$ cm, $\beta = 33°$
g) $b = 11$ cm, $c = 10$ cm, $\beta = 39°$
h) $a = 12$ cm, $b = 14$ cm, $\alpha = 36°$.

7. Odredi nepoznate elemente trokuta ABC ako je poznato:

a) $a - b = 2$ cm, $\alpha = 73°12'$, $\beta = 48°52'$
b) $a + c = 26$ cm, $\alpha = 84°20'$, $\gamma = 58°14'$
c) $b - c = 8$ cm, $\alpha = 87°$, $\beta = 65°15'$
d) $b + c = 10$ cm, $\alpha = 81°33'$, $\gamma = 79°45'$
e) $a = 26$ cm, $b = 20$ cm, $\beta + \gamma = 105°$
f) $a = 12$ cm, $c = 14$ cm, $\alpha + \beta = 95°$.

8. Izračunaj duljine stranica trokuta ako je opseg trokuta 30 cm, a dva kuta trokuta 60° i 55°.

9. Izračunaj duljine stranica trokuta ABC ako je opseg trokuta 25 cm, a $\alpha + \beta = 100°$ i $\gamma - \alpha = 10°$.

10. Visina na stranicu c trokuta ABC ima duljinu 5 cm, stranica b duljine je 6 cm, a kut nasuprot stranice c ima 77°. Izračunaj duljine stranica a i c.

11. Visina na stranicu b trokuta ABC ima duljinu 8 cm, stranica a duljine je 10 cm, a kut nasuprot stranice b ima 88°. Izračunaj duljine stranica b i c.

12. Dokaži da $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ vrijedi u svakome:

a) pravokutnom trokutu
b) tupokutnom trokutu.

(Uputa: Prilagodi ranije upotrijebljeni dokaz za šiljastokutan trokut koji sadržava središte njemu opisane kružnice.)

13. Duljina polumjera trokutu opisane kružnice jest 14 cm. Jedna stranica ima duljinu 12 cm, a kut uz nju 58°. Izračunaj duljine ostalih dviju stranica.

14. Duljina polumjera trokutu opisane kružnice jest 16 cm. Dvije stranice imaju duljine 10 cm i 12 cm. Kolika je duljina treće stranice?

ZADATCI

15. Dulja dijagonala paralelograma zatvara sa stranicama kutove od 18° odnosno 22°. Ako je duljina dulje stranice paralelograma 20 cm, kolika je duljina druge stranice i dulje dijagonale?

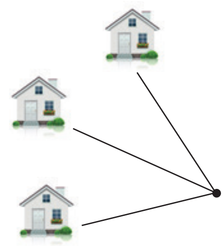
16. Kraća dijagonala paralelograma ima duljinu 15 cm i sa stranicama paralelograma zatvara kutove 65°, odnosno 35°. Kolike su duljine stranica paralelograma?

17. Trapez ima osnovice duljina 20 cm i 16 cm te dva kuta 75° i 55°. Kolike su duljine krakova toga trapeza?

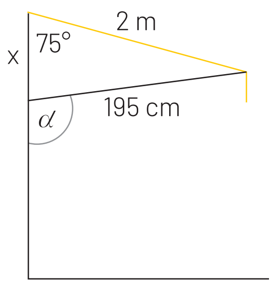
18. Trapez ima osnovice duljina 10 cm i 5 cm te dulji krak 6 cm. Kut između dulje osnovice i kraćega kraka iznosi 70°. Koliki su ostali kutovi trapeza i duljina kraćega kraka?

19. Dijagonala jednakokračnoga trapeza zatvara s osnovicom trapeza kut 25°30′, a s krakom 59°26′. U kojemu omjeru simetrala šiljastoga kuta trapeza dijeli dijagonalu?

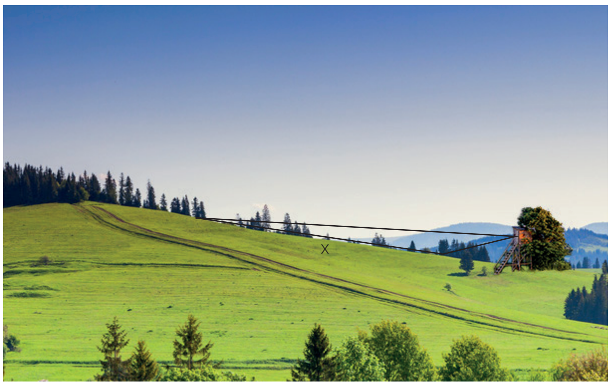
20. Iz tri zgrade A, B i C, do kioska vode tri staze, svaka duljine 50 m. Koliko su međusobno udaljene zgrade ako staze međusobno zatvaraju kutove 30° odnosno 45°?



21. Majstor Pero postavlja tendu duljine 2 m iznad vrata tako da je nagib tende 75° u odnosu na zid. Na kojoj udaljenosti ispod mjesta na kojemu je učvršćena tenda treba na zid pričvrstiti nosač duljine 195 cm i pod kojim kutom sa zidom?



22. Lovac Luka sa čeke visoke 6 m promatra ispred sebe brdo nagiba 20° i bilježi mjesta gdje se okupljaju jeleni kako bi im napravio hranilišta. Jedno će napraviti u podnožju brda koje vidi pod kutom depresije 5°, a drugo na brdu na mjestu koje vidi pod kutom elevacije 5°. Kolika je međusobna udaljenost hranilišta?



ZADATCI

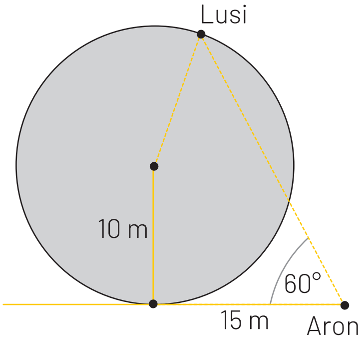
23. U adrenalinskome parku žele postaviti žicu s jednoga brda, nagiba 30°, na drugo brdo, nagiba 20°. Početnu točku postavili bi na strmije brdo na nadmorskoj visini 40 m. Kut pod kojim bi bila žica u odnosu na to brdo jest 20°.

a) Koliko je duga žica?

b) Na kojoj se nadmorskoj visini na drugome brdu nalazi kraj žice?

24. Parkiralište oblika trapeza duljina osnovica 100 m i 80 m te kutova 65° i 75° potrebno je ograditi. Kolika će biti ukupna duljina ograde?

25. Vrtna prskalica zalijeva krug promjera 20 m. Na stazi sjedi pas Aron 15 m daleko od mjesta gdje voda iz prskalice dotiče stazu. Ugledavši kujicu Lusi koja se nalazi na rubu mokre površine, Aron potrči prema njoj pod kutom 60° u odnosu na stazu. Koliki će put Aron prijeći kroz vodu da bi došao do Lusi?



POUČAK O KOSINUSU

Poučak o kosinusu primjenjujemo za rješavanje trokuta kojemu su zadane dvije stranice i kut među njima (SKS) ili sve tri stranice (SSS). Taj je poučak poopćenje Pitagorina poučka.

Promotrimo trokut *ABC*.

Podijelimo ga na dva pravokutna trokuta povlačenjem visine na stranicu *b*.

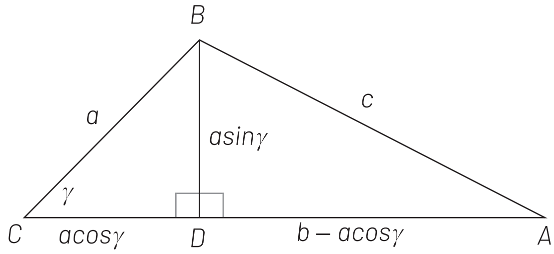
Primjenom trigonometrijskih omjera u pravokutnome trokutu *BCD* izrazimo katete s pomoću kuta γ pa u pravokutnome trokutu *ABD* računamo hipotenuzu primjenom Pitagorina poučka.

$$c^2 = (a\sin\gamma)^2 + (b - a\cos\gamma)^2$$

$$c^2 = a^2\sin^2\gamma + b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma$$

$$c^2 = a^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



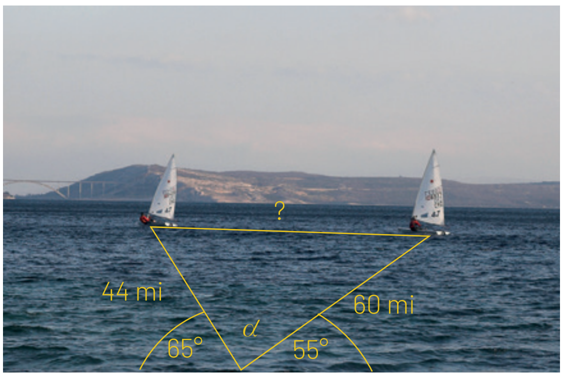
Može se pokazati da isti dokaz vrijedi i za tupokutni trokut. Pokušajte to dokazati.

POUČAK O KOSINUSU

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

ZADATAK 1. Izrazi poučak o kosinusu za stranice *a* i *b*.

PRIMJER 1. Kolika je udaljenost između brodova na slici, izraženo na desetinke milja?



Rješenje

Sa slike vidimo: $\alpha = 180° - (65° + 55°) = 60°$

$a^2 = 60^2 + 44^2 - 2 \cdot 60 \cdot 44 \cdot \cos 60° \approx 2896$

$a \approx 53.8$ mi.

ZADATAK 2. Riješi trokut kojemu su dvije stranice 38.8 cm i 21.2 cm, a kut između njih 72.4°.

PRIMJER **2.**

Odredimo kutove trokuta kojemu su stranice $a = 3.1$ cm, $b = 5.4$ cm i $c = 7.2$ cm.

Rješenje

Odredimo prvo najveći kut γ koji leži nasuprot najdulje stranice:

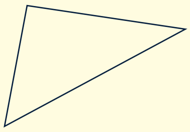
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \;\Rightarrow\; \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos\gamma = \frac{3.1^2 + 5.4^2 - 7.2^2}{2\cdot 5.4\cdot 7.2},\ \gamma \approx 112°59'$$

Analogno možemo odrediti kut α:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \alpha \approx 23°21'$$

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) \approx 43°40'.$$



Nasuprot duljoj stranici jest veći kut.

ZADATAK **3.**

Odredi najmanji kut trokuta kojemu su stranice $a = 5$ cm, $b = 8$ cm i $c = 12$ cm.

PRIMJER **3.**

Odredimo kutove trokuta ako je omjer njegovih stranica $a : b : c = 5 : 6 : 8$.

Rješenje

Kako je $a : b : c = 5 : 6 : 8$, vrijedi: $a = 5k$, $b = 6k$ i $c = 8k$.

Odredimo kut γ:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \;\Rightarrow\; \cos\gamma = \frac{(5k)^2 + (6k)^2 - (8k)^2}{2\cdot 5k\cdot 6k} = -\frac{3k^2}{60k^2} = -\frac{1}{20},\ \gamma \approx 92°52'.$$

Kut α možemo odrediti analogno ili jednostavnije uz pomoć poučka o sinusima:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma = \frac{5}{8}\sin 92°52' \;\Rightarrow\; \alpha \approx 38°37'$$

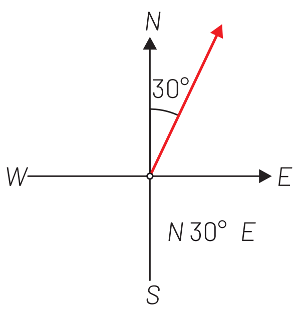
$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) \approx 48°31'.$$

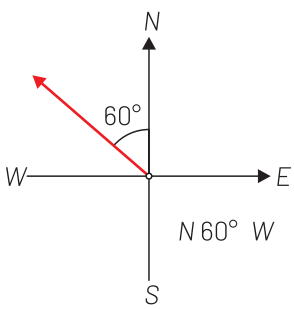
ZADATAK **4.**

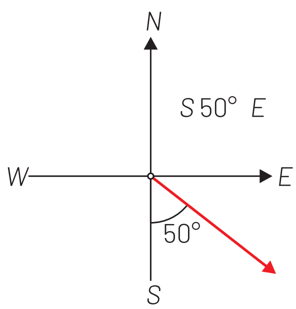
Stranice trokuta jesu $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3 + \sqrt{3}$. Odredi kut nasuprot stranici a.

U navigaciji smjer kretanja određujemo **azimutom**, tj. kutom koji smjer kretanja zatvara sa smjerovima N (engl. *north* – sjever), E (engl. *east* – istok), S (engl. *south* – jug) i W (engl. *west* – zapad).

Na primjer, azimut ***N* 30° *E*** (na prvoj slici) znači da smjer kretanja s N zatvara kut od 30° na strani prema E.



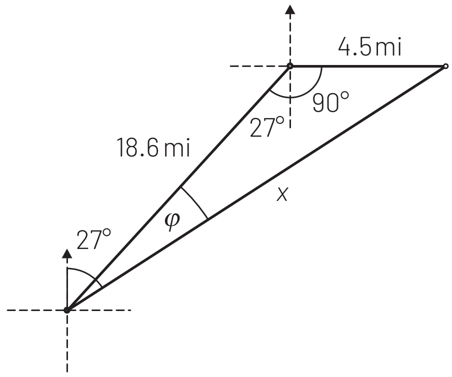




PRIMJER

4. Brod napušta luku po azimutu od N 27° E i putuje 2 sata brzinom 9.3 milje na sat. Nakon toga brod se okreće u smjeru istoka i nastavlja ploviti 4.5 milje. Koliko je brod na kraju udaljen od luke? Koliki je konačni azimut broda u odnosu na luku?

Rješenje



Poučkom o kosinusu nalazimo x:

$x^2 = 18.6^2 + 4.5^2 - 2 \cdot 18.6 \cdot 4.5 \cdot \cos 117°$

$x^2 \approx 442.21$, $x \approx 21$ mi.

Poučkom o sinusima nalazimo φ.

$\frac{4.5}{\sin\varphi} = \frac{21}{\sin 117°} \Rightarrow \varphi \approx 11°$

Konačni je azimut broda 38°.

ZADATAK

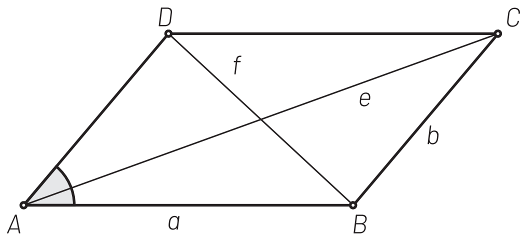
5. Zrakoplov 200 mi leti u smjeru *N* 20° E. Nakon jednoga sata promijeni smjer u *N* 40° E. Brzina je zrakoplova 800 km/h. Izračunaj udaljenost zrakoplova od početne točke nakon što je pola sata letio novim smjerom. Odredi konačni azimut zrakoplova u odnosu na polaznu točku.

Primjenom poučka o sinusu i kosinusu možemo dokazati i mnoge geometrijske tvrdnje.

PRIMJER

5. Dokažimo da je zbroj kvadrata dijagonala paralelograma jednak dvostrukomu zbroju kvadrata stranica.

Rješenje



Neka su a i b duljine stranica, a e i f duljine dijagonala paralelograma *ABCD.*

Trebamo pokazati da je: $e^2 + f^2 = 2\,(a^2 + b^2)$.

Kako je četverokut *ABCD* paralelogram, za njegove kutove vrijedi:

$\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \cos\beta = -\cos\alpha$.

Primjenom poučka o kosinusu na trokut *ABD*, odnosno trokut *ABC*, slijedi:

$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$

Dakle:

$e^2 + f^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha + a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2\,(a^2 + b^2)$,

što je trebalo dokazati.

ZADATAK

6. Dokaži da za duljinu težišnice t_a trokuta vrijedi: $4t_a^{\,2} = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$.

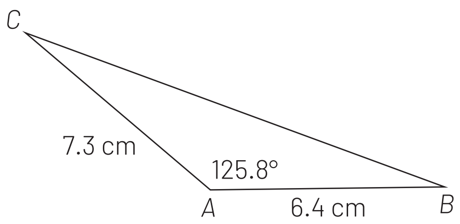
ZADATCI

7. Riješi trokut ako je zadano:

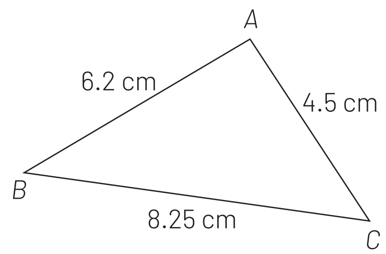
a) $a = 5$ cm, $b = 8$ cm, $\gamma = 85°$
b) $b = 3.25$ cm, $c = 4.8$ cm, $\alpha = 58.6°$
c) $a = 15.8$ m, $c = 12.35$ m, $\beta = 96°42'35''$
d) $a = 95$ cm, $b = 85$ cm, $c = 75$ cm
e) $a = 5.5$ cm, $b = 7.3$ cm, $c = 4.6$ cm
f) $a = 15.25$ m, $b = 22.5$ m, $c = 18.6$ m
g) $a = 3\sqrt{5}$ cm, $b = 5\sqrt{2}$ cm, $c = 2\sqrt{7}$ cm
h) $a = 2\sqrt{3} + 1$ cm, $b = 3\sqrt{2}$ cm, $c = 5\sqrt{3} - 1$ cm
i) $b = 10$ cm, $c = 15$ cm, $\beta + \gamma = 100°$
j) $a = 21$ cm, $b = 13.5$ cm, $\alpha + \beta = 115°20'$.

8. Riješi trokut.

a)



b)



9. Riješi trokut ako je zadano:

a) $a = 4\sqrt{7}$ cm, $\alpha = 60°$, $b - c = 4$ cm
b) $c = 21$ cm, $a + b = 24$ cm, $\alpha + \beta = 60°$
c) $a = 8$ cm, $\alpha = 98°15'$, $bc = 27$ cm^2
d) $a = 2c$, $b = 5$ cm, $\beta = 42°18'$.

10. Duljine stranica trokuta u omjeru su 5 : 4 : 2. Odredi najveći kut trokuta.

11. Duljine stranica trokuta u omjeru su 13 : 14 : 15. Odredi najmanji kut trokuta.

12. Riješi trokut ako je zadano:

a) $a = 9.5$ cm, $c = 12$ cm, $v_a = 5.5$ cm
b) $c = 11.2$ cm, $\alpha = 43.8°$, $v_c = 6.25$ cm.

13. U trokutu *ABC* odredi duljinu težišnice na stranicu c t_c ako je:

a) $b = 10$ cm, $c = 15$ cm, $\alpha = 72°25'$
b) $a = 8.5$ cm, $b = 6.8$ cm, $c = 12.5$ cm.

14. Riješi trokut ako je zadano:

a) $a = 12$ cm, $b = 9.5$ cm, $t_a = 7.8$ cm
b) $a = 12.2$ m, $c = 10.4$ m, $t_b = 7.8$ cm.

15. Odredi stranice i kutove paralelograma uz zadane duljine dijagonala e i f i kut među njima φ.

a) $e = 21$ cm, $f = 36$ cm, $\varphi = 132°40'$
b) $e = 16$ cm, $f = 28$ cm, $\varphi = 64°28'12''$.

16. Odredi duljine dijagonala paralelograma i kut među njima ako je zadano:

a) $a = 25$ cm, $b = 13.5$ cm, $\alpha = 65°30'$
a) $a = 7.45$ m, $b = 4.15$ m, $\beta = 112°50'$.

ZADATCI

17. Odredi kutove trapeza ako su duljine stranica:

a) $a = 18$ cm, $b = 8.5$ cm, $c = 11$ cm, $d = 7$ cm

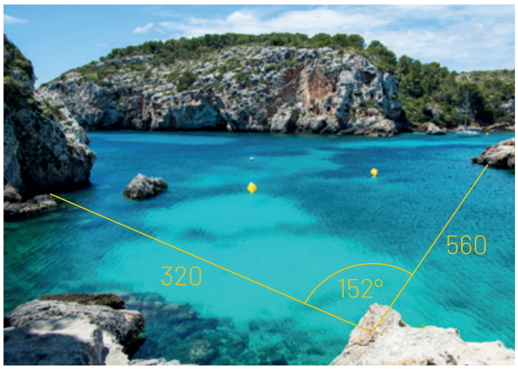
b) $a = 22.5$ cm, $b = 12.25$ cm, $c = 13$ cm, $d = 10.8$ cm.

18. Osnovice su trapeza 17 i 7 cm. Krak duljine 8 cm s osnovicom zatvara kut $75°30'$. Odredi duljinu drugoga kraka i dijagonale trapeza.

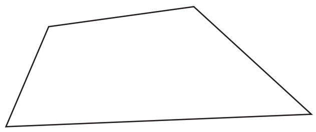
19. Tri kružnice polumjera 3, 5 i 7 cm dodiruju se međusobno. Odredi kutove trokuta kojemu su vrhovi središta tih kružnica.

20. U zabavnome parku na jednoj blagajni naplaćuju se ulaznice za dvije atrakcije do kojih se dolazi ograđenim stazama. Prva atrakcija udaljena je od blagajne 8, a druga 10 metara. Ako staze kojima se dolazi do atrakcija zatvaraju kut od 140°, koliko su atrakcije udaljene jedna od druge?

21. Turistički gradić želi postaviti bove u more između rubova uvale da bi označili zonu plivanja. S točke na plaži izmjerena je udaljenost do rubova uvale 320 i 560 m te kut između njih 152°. Koliko će bova postaviti gradić ako se bove postavljaju na konop počevši 3 metra od ruba obale tako da jedna od druge budu udaljene 50 cm?



22. Trg je oblika četverokuta kao na slici. Na trgu se nalazi spomenik udaljen od vrhova četverokuta 24, 28, 35 i 42 metra.



a) Pod kojim se kutom od spomenika vidi najdulja stranica trga, duga 73 metra?

b) Ako se ostale tri stranice trga vide pod jednakim kutovima, koliko približno iznosi opseg trga?

23. Jana je krenula glavnom ulicom koja vodi do škole udaljene 2.2 km. Nakon 1.7 km skrenula je u sporednu ulicu pod kutom 50° do pekare udaljene 350 m pa je do škole došla izravnom stazom kroz park. Koliko je Jana skrenuvši u pekaru produžila put?

24. Svjetionik na otočiću udaljen je 12 km od luke po azimutu N 55° E. Trajekt isplovljava iz luke brzinom 24 km/h po azimutu N 32° W. Koliko je trajekt udaljen od svjetionika nakon 2.5 sata vožnje?

25. Dva broda isplovila su iz iste luke. Prvi brod napustio je luku u 8.00 sati i plovi u smjeru S 36° E brzinom 20 milja na sat. Drugi brod isplovio je 2.5 sata kasnije u smjeru N 27° E brzinom 22 milje na sat. Koliko će brodovi biti udaljeni u 18 sati?

POVRŠINA TROKUTA

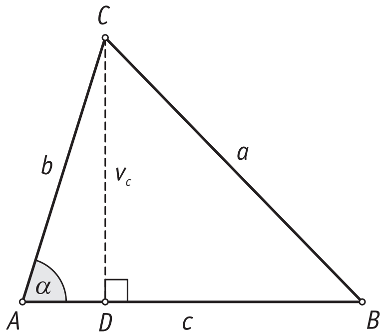
Iz elementarne geometrije poznato nam je da je površina trokuta jednaka polovini umnoška stranice i njoj pripadne visine: $P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$.

Izvest ćemo još neke formule za površinu trokuta koristeći se trigonometrijskim omjerima.

PRIMJER

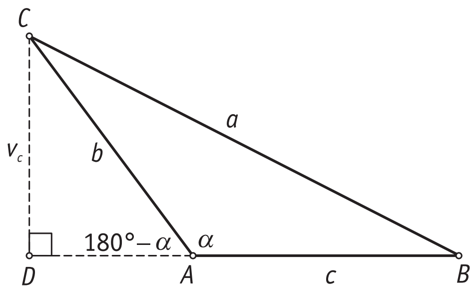
1. Odredimo površinu trokuta ABC ako je $b = 36$ m, $c = 29$ m, $\alpha = 62°$.

Rješenje



Iz pravokutnoga trokuta ADC imamo: $v_c = b \cdot \sin\alpha$, pa je

$$P = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin\alpha}{2} \approx 460.9 \text{ m}^2 .$$



Na jednak način izračunali bismo površinu trokuta i da je α tupi kut jer vrijedi $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, pa imamo: $v_c = b \cdot \sin(180° - \alpha) = b \cdot \sin\alpha$.

ZADATAK

1. Odredi površinu trokuta ABC ako je $a = 5$ m, $b = 3$ m, $\gamma = 30°$.

PRIMJER

2. Dokažimo da se površina svakoga trokuta može izračunati po formuli $P = \frac{abc}{4R}$.

Rješenje

Iz poučka o sinusima znamo da je $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$.

$$P = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}.$$

PRIMJER

3. Odredimo površinu trokuta ABC ako je $b = 15$ cm, $\beta = 36°$, $\gamma = 69°$.

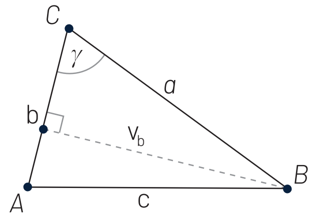
Rješenje

$P = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{b \cdot a \cdot \sin\gamma}{2}$ (vidi sliku). Treba nam a.

Iz poučka o sinusima: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a=\frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Iako je izračunati $\alpha=180°-(\beta+\gamma)=75°$,

pa dobijemo $P=\frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}\approx 172.6\text{ cm}^2$.



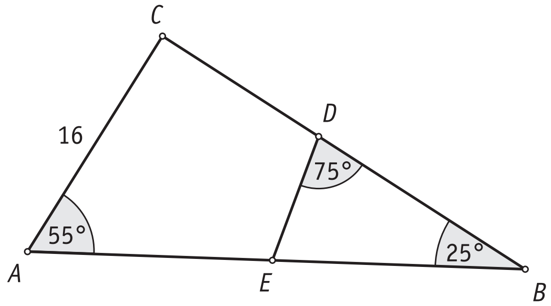
ZADATAK

2. Odredi površinu trokuta *ABC* ako je $a=14$ cm, $\beta=57°23'$, $\alpha=79°$.

3. U trokutu *ABC* točka *D* polovište je stranice *BC*, $|AC|=16$ cm, a veličina kutova prikazana je na slici.

a) Odredi površinu trokuta *ABC*.

b) Odredi površinu trokuta *BDE*.



Površinu trokuta kojemu znamo sve tri stranice određujemo Heronovom formulom:
$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je $s=\frac{a+b+c}{2}$.

PRIMJER

4. Dokažimo Heronovu formulu.

Rješenje

Površina trokuta jest:

$P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma\ /\cdot 4 \Rightarrow 4P=2ab\sin\gamma\ /^2 \Rightarrow 16P^2=4a^2b^2\sin^2\gamma$ (1)

Prema poučku o kosinusu imamo:

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \Rightarrow a^2+b^2-c^2=2ab\cos\gamma$

$\Rightarrow (a^2+b^2-c^2)^2=4a^2b^2\cos^2\gamma$ (2)

Zbrojimo (1) i (2) i dobijemo: $16P^2+(a^2+b^2-c^2)^2=4a^2b^2(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)$

$16P^2=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2=(2ab-a^2-b^2+c^2)(2ab+a^2+b^2-c^2)=$

$((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)=(a+b-c)(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)$

Uvrstimo $2s=a+b+c$ i dobijemo:

$16P^2=2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)=16s(s-a)(s-b)(s-c)$, odnosno

$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

ZADATAK

4. Izračunaj površinu trokuta sa stranicama:

a) $a=3$ cm, $b=6$ cm, $c=5$ cm

b) $a=7$ cm, $b=4.8$ cm, $c=5.6$ cm.

PRIMJER **5.** Bazen u obliku trokuta ima stranice duljine 23 m, 17 m i 26 m. Koliko je m^3 vode potrebno kako bi se napunio bazen ako je dubina bazena 1.5 m?

Rješenje

$V = B \cdot v = B \cdot 1.5$ m.

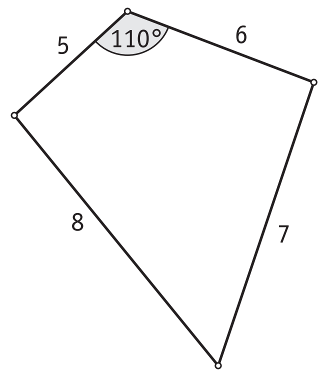
Površinu dna bazena B izračunamo Heronovom formulom:

$a = 23$ m, $b = 17$ m, $c = 26$ m, $s = \frac{a+b+c}{2} = 33$ m,

$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 192.25$ m^2.

$V = B \cdot v = 288.375$ m^3. Da bi se bazen napunio, potrebno je 288.375 m^3 vode.

ZADATAK **5.** Izračunaj površinu četverokuta na slici.



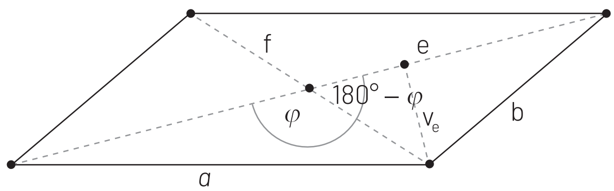
6. Odredi površinu paralelograma ako je poznato:

a) Duljine stranica paralelograma iznose 12 cm i 16 cm, a duljina duže dijagonale 22 cm.

b) Duljine stranica paralelograma iznose 8 cm i 13 cm, a jedan kut 57°.

PRIMJER **6.** Izračunajmo površinu paralelograma ako su duljine dijagonala $e = 20$ cm, $f = 15$ cm i kut između dijagonala $\varphi = 94°$.

Rješenje



Paralelogram možemo podijeliti na dva sukladna trokuta sa stranicom e i visinom na tu stranicu v_e.

$$\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi = \frac{v_e}{\frac{f}{2}} \Rightarrow v_e = \frac{1}{2} f \cdot \sin\varphi.$$

Površina paralelograma: $P = 2 \cdot \frac{1}{2} e \cdot v_e = \frac{1}{2} e \cdot f \cdot \sin\varphi \approx 149.63$ cm^2.

ZADATAK **7.** U parku oblika četverokuta nalaze se dvije staze na dijagonalama četverokuta. Staze su duljina 40 m i 35 m te zatvaraju kut 50°. Kolika je površina parka?

ZADATCI

8. Odredi površinu trokuta *ABC* ako je zadano (rezultat zaokruži na dvije decimale):

a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 33°$
b) $a = 5$ cm, $c = 8$ cm, $\beta = 58°$
c) $b = 12$ cm, $c = 13$ cm, $\alpha = 47°$
d) $a = 22$ cm, $\alpha = 44°$, $\beta = 56°$
e) $b = 54$ cm, $\alpha = 34°22'$, $\gamma = 56°24'$
f) $c = 21$ cm, $\beta = 45°45'$, $\gamma = 56°56'$
g) $a = 18$ cm, $\alpha = 82°44'$, $\gamma = 71°23'$
h) $b = 16$ cm, $\beta = 53°28'$, $\gamma = 96°14'$.

9. Odredi površinu trokuta *ABC* ako je zadano (rezultat zaokruži na dvije decimale):

a) $a - b = 5$ cm, $\alpha = 78°$, $\beta = 58°$
b) $a + c = 18$ cm, $\beta = 54°$, $\gamma = 65°$
c) $o = 89$ cm, $\alpha = 29°$, $\beta = 71°$
d) $o = 36$ cm, $\alpha = 82°$, $\gamma = 52°$
e) $\alpha : \beta : \gamma = 6 : 7 : 11$, $b = 15$ cm
f) $\alpha : \beta : \gamma = 7 : 9 : 4$, $c = 10$ cm.

10. Izračunaj polumjer kružnice opisane i upisane trokutu *ABC* ako je zadano (rezultat zaokruži na dvije decimale):

a) $a = 5$ cm, $b = 10$ cm, $\gamma = 76°$
b) $b = 14$ cm, $c = 8$ cm, $\alpha = 64°$
c) $a = 8$ cm, $\alpha = 39°$, $\gamma = 82°$
d) $b = 12$ cm, $\beta = 46°$, $\gamma = 50°$
e) $c = 11$ cm, $\alpha = 71°$, $\beta = 44°$
f) $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, $\alpha = 56°$.

11. Površina paralelograma iznosi 45 cm^2. Duljine dijagonala jesu 16 cm i 12 cm. Koliki je opseg toga paralelograma?

12. Površina paralelograma iznosi 40 cm^2. Duljine stranica jesu 11 cm i 12 cm. Koliki je kut između dijagonala toga paralelograma?

13. Dijagonala paralelograma opsega 56 cm dijeli jedan kut paralelograma na 15° i 25°. Kolika je površina toga paralelograma?

14. Izračunaj površinu trapeza kojemu su duljine osnovica 12 cm i 8 cm, a duljine dijagonala 15 cm i 10 cm.

15. Izračunaj površinu trapeza kojemu su duljine osnovica 20 cm i 16 cm, a šiljasti kutovi 55° i 60°.

16. U parku oblika trapeza duljina osnovica 80 m i 50 m te kutova 50° i 70° staze povezuju svaka dva vrha.

a) Kolika je ukupna duljina staza?
b) Kolika je površina parka?

17. Klara izrezuje zastavicu oblika trokuta s dvije stranice 10 i 12 cm iz papirnatoga kruga površine 42.25π cm^2. Vrhovi zastavice nalaze se na rubu papira.

a) Kolika je treća stranica zastavice?
b) Kolika je površina zastavice?

ZADATCI

18. Slastičarka Mara izrezuje kolač na komade površine 13 cm^2, oblika paralelograma. Stranice i jedna dijagonala paralelograma odnose se kao 4 : 2 : 3.

a) Pod kojim kutom treba rezati stranice kolača?

b) Koliki je opseg komada kolača?

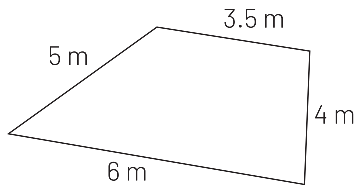
19. Jedro oblika trokuta ima stranice 4 m, 5 m i 6 m.

a) Kolika je površina jedra?

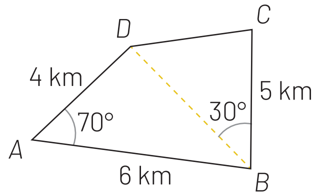
b) Koliki su kutovi jedra?

20. Od komada drva treba izrezati dio u obliku trokuta površine 360 cm^2. Ako je jedna stranica već izrezana i iznosi 36 cm, pod kojim se kutovima trebaju odrezati preostale dvije stranice tako da se dobivenomu drvenom trokutu može nacrtati upisana kružnica polumjera 8 cm?

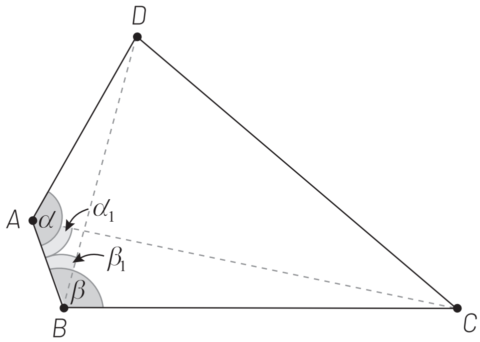
21. Marin treba popločiti dio vrta u obliku trapeza (na slici), kvadratnim pločicama 34 cm × 34 cm. Koliko će mu paketa pločica trebati ako su pakirane po 16 komada i koliko će ga to stajati ako je cijena 100 kn/m^2?



22. Ivo i Mate dobro su zaradili prodajom božićnih drvaca, pa su odlučili proširiti posao i zasaditi još više drvaca. Za to im je potrebno zemljište površine ne manje od 18 km^2. Pronašli su jedno zemljište oblika kao na slici. Hoće li njegova površina odgovarati Ivi i Mati? Odredi udaljenost između točaka C i D na tome zemljištu.



23. Gazda Mata odlučio je dio oranice zasaditi lukom. Izračunao je površinu toga dijela oranice tako što je iz točaka A i B, međusobno udaljenih 20 m, promatrao voćke u točkama C i D i izmjerio kutove $\alpha = 130°$, $\alpha_1 = 60°$, $\beta = 110°$ i $\beta_1 = 35°$. Koliku je površinu gazda Mata zasadio lukom?



JESMO LI RAZUMJELI?

1. Dva su kuta trokuta 52° i 63°. Ako je duljina najdulje stranice 20 cm, duljina je najkraće:

A. 16 cm B. 16.6 cm C. 17.4 cm D. 17.7 cm.

2. Ako su stranice trokuta u omjeru 7 : 5 : 3 najveći je kut trokuta:

A. 110° B. 120° C. 130° D. 150°.

3. Ako su kutovi trokuta u omjeru 7 : 5 : 3, omjer najkraće i najdulje stranice jest:

A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{5}{7}$.

4. Ako je $a = 2b$ i $\beta = 30°$, tada je α:

A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°.

5. Ako su dva kuta trokuta 47° i 58°, a razlika stranica nasuprot tim kutovima 3 cm, tada je duljina treće stranice:

A. 18.8 cm B. 21.8 cm C. 24.8 cm D. 28.8 cm.

6. Dvije stranice trokuta imaju duljine 5 cm i 6 cm, a polumjer trokutu opisane kružnice iznosi 4 cm. Kolika je mjera kuta nasuprot trećoj stranici?

A. 38°41′ B. 48°35′ C. 87°16′ D. 92°44′

7. Ako su kutovi trokuta u omjeru 5 : 6 : 7, a polumjer trokutu opisane kružnice 3 cm, kolika je duljina najkraće stranice?

A. 4.6 cm B. 5 cm C. 5.2 cm D. 5.6 cm

8. Ako su stranica a i težišnica na stranicu c duljina 10 i 15 cm te zatvaraju kut 42°, duljina stranice c iznosi:

A. 10 cm B. 17 cm C. 20 cm D. 25 cm.

9. Ako je površina trokuta $75\sqrt{3}$, najkraća stranica 15 cm i najveći kut 120°, kolika je duljina najveće stranice?

A. 20 cm B. 30 cm C. 30.4 cm D. 37.5 cm

10. Kolika je duljina kraće stranice paralelograma ako su duljine dijagonala 9 i 5 cm, a kut među njima 95°?

A. 4.95 cm B. 5.3 cm C. 9.9 cm D. 10.7 cm

11. Koliki je najmanji kut trapeza kojem su osnovice 13 i 8, a krakovi 6 i 4 cm?

A. 28°31′ B. 41°25′ C. 55°46′ D. 82°49′

12. Kolika je površina trokuta ako je stranica a duljine 10 cm i $\alpha = 2\beta = 105°$?

A. 15.7 cm B. 28.7 cm C. 29.5 cm^2 D. 59 cm^2

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

1. Koji kut predstavlja točka s koordinatama $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ na trigonometrijskoj kružnici? Odredi tangens toga kuta.

2. Za jedan od kutova u trokutu vrijedi da je $\cos\alpha < 0$. Ako su stranice trokuta 16 cm, 18 cm, 28 cm, a polumjer tomu trokutu opisane kružnice $R = 15$cm, odredi kut α.

3. U trokutu ABC zadane su duljine stranica $|AB| = 8$ cm i $|BC| = 15$ cm te $\alpha = 150°$. Izračunaj:

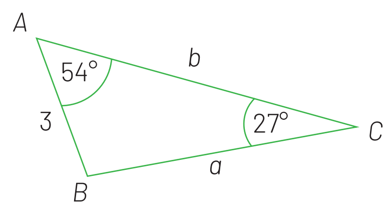
a) polumjer kružnice opisane tomu trokutu

b) površinu trokuta ABC

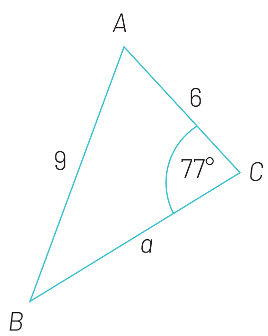
c) opseg trokuta ABC.

4. Izračunaj nepoznate elemente trokuta koji su označeni na slici. Duljine stranica dane su u cm.

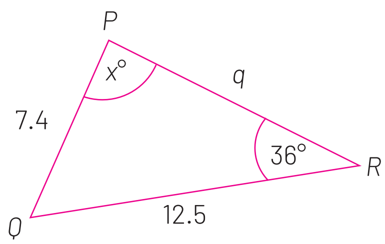
a)



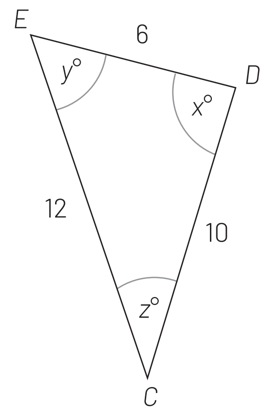
b)



c)



d)



5. Riješi trokut ABC i odredi njegovu površinu ako je zadano:

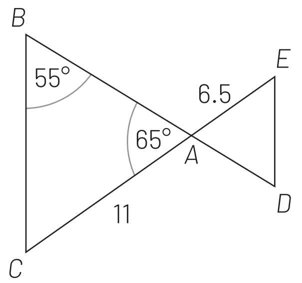
a) $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$, $b = 3$ cm

b) $a + c = 9$, $b = 3.5$ cm, $\alpha = 82°$

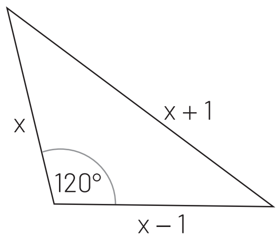
c) $a = \sqrt{13}$cm, $c = 3b$, $\alpha = 60°$.

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

6. a) Ako su trokuti ABC i ADE slični, izračunaj duljinu dužine $\overline{DE}$.



b) Odredi x sa slike.



7. Stranice trokuta odnose se kao 2 : 3 : 4. Odredi najmanji kut trokuta i duljinu najdulje visine trokuta ako je polumjer trokutu opisane kružnice 24 cm.

8. Duljine dviju stranica trokuta ABC jesu $a = 4$ cm, $c = 2$ cm, a duljina težišnice povučene iz vrha A jednaka je 3 cm. Odredi kut α.

9. Izračunaj duljine stranica trokuta kojemu je površina jednaka 20 cm^2, $\alpha = 45°$, $\operatorname{tg} \beta = 8$.

10. Duljine dviju stranica paralelograma jesu 14 cm i 21 cm, a duljina duže dijagonale iznosi 29 cm. Odredi kutove paralelograma i duljinu druge dijagonale.

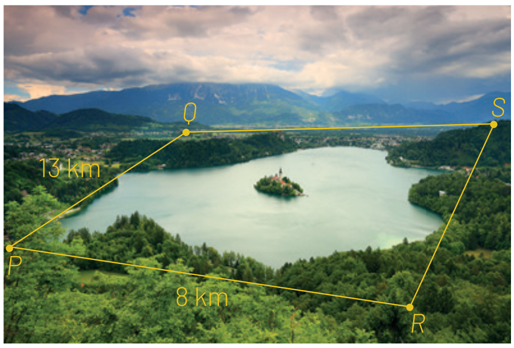
11. Odredi duljine stanica paralelograma ako je njegov opseg 12 cm, kut između stranica $\alpha = 60°$ te duljina kraće dijagonale 5 cm.

12. Duljine osnovica trapeza iznose 25 cm i 10 cm, a jedna dijagonala duljine 21 cm zatvara s krakom kut od 100°. Izračunajte duljinu druge dijagonale i površinu trapeza.

13. Neka je u trokutu ABC jedna stranica za 2 veća od stranice a, a druga stranica za dva manja od stranice b. Mjera jednoga kuta jest 120°. Odredite duljine svih stranica i polumjer kružnice upisane i opisane tomu trokutu.

14. Duljine tetiva kružnice redom su $|AB| = 4$ cm i $|BC| = 5$ cm. Odredi polumjer kružnice ako je površina trokuta ABC jednaka 8 cm^2.

15. Na putu od grada P prema gradu S Djed Božićnjak mora zaobići veliko jezero, no u velikoj je dilemi jer postoje dva puta, preko grada Q i preko grada R. Jedino što je Djed uspio saznati jest sljedeće: Iz grada P gradovi R i Q vide se pod kutom od 120°, gradovi Q i S vide se iz grada R pod kutom od 45°, a gradovi R i S vide se iz grada Q pod kutom od 75°. Kako se Djedu jako žuri obići svu djecu, pomozite mu izabrati kraći put.



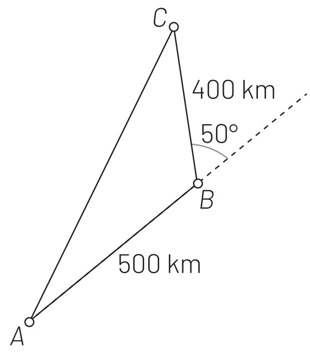
16. Kolika je duljina kazaljki na zidnome satu ako su njihovi krajevi u 10 h udaljeni 26 mm, a u 15 h udaljeni su 34 mm?

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

17. Avion leti iz grada A prema gradu B koji su međusobno udaljeni 500 km, a zatim skreće prema gradu C, koji je od B udaljen 400 km, pod kutom od 50°.

a) Koliko su međusobno udaljeni gradovi A i C?

b) Pod kojim kutom treba pilot skrenuti kod grada C kako bi se vratio prema gradu A?



18. Brod plovi iz luke P prema luki R, koja je udaljena 7 km, po azimutu N 54°W, a zatim skreće prema luki Q sljedećih 11 km po azimutu N 70°E. Ako u povratku brod ide ravno u luku P, po kojem azimutu mora skrenuti iz luke Q prema P? Koliko će km prijeći od luke Q prema P?

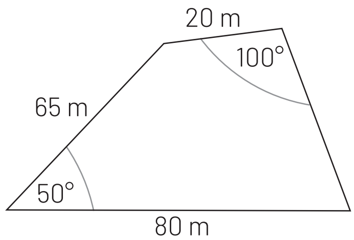
19. Ivan, Marko i Klara voze se kajacima po jezeru. Ivan je 420 metara udaljen od Marka po azimutu S 75° E. Klara je udaljena od Marka za 300 metara po azimutu N 40° W. Odredi udaljenost između Ivana i Klare.

20. Brod je ploveći na redovnoj liniji od mjesta A prema mjestu B, međusobno udaljenih 90 milja, skrenuo s kursa za 15°.

a) Ako je brod otkrio pogrešku nakon 100 minuta plovidbe pri konstantnoj brzini od 25mi/h, po kojemu azimutu mora skrenuti nazad na pravi kurs, odnosno prema mjestu B?

b) Kojom bi sada konstantnom brzinom trebao ploviti kako skretanje s kursa ne bi utjecalo na vrijeme dolaska u mjesto B?

21. Cijena građevinskoga zemljišta na kojemu bi Vito htio graditi kuću iznosi 30 eura po kvadratnome metru. Koliko će Vita stajati parcela nepravilnoga oblika sa slike?



22. Pri projektiranju novoga skijaškog lifta od točke A u podnožju do točke B na vrhu brda, promatrač je iz točke A vidio vrh brda B pod kutom elevacije 28°24′, a 30 metara dalje iz točke C pod kutom elevacije od 18°32′. Kolika je udaljenost od A do B?

RJEŠENJA

1. TRIGONOMETRIJA TROKUTA

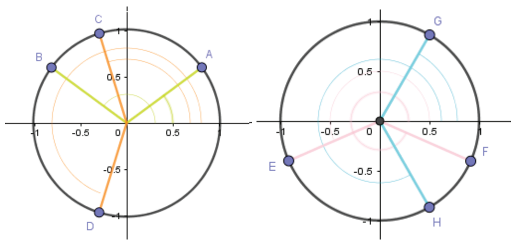
TRIGONOMETRIJSKI OMJERI

1.

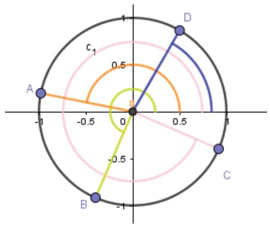
	točka	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
a)	$\left(0.3, \frac{\sqrt{91}}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{91}}{10}$	0.3	$\frac{\sqrt{91}}{3}$	$\frac{3\sqrt{91}}{91}$
b)	$(-0.8, 0.6)$	0.6	-0.8	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$
c)	$\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}, -0.4\right)$	-0.4	$-\frac{\sqrt{21}}{5}$	$\frac{2\sqrt{21}}{21}$	$\frac{\sqrt{21}}{2}$
d)	$(0.8, -0.6)$	-0.6	0.8	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{4}$

2. a) sve vrijednosti su pozitivne **b)** sinus je pozitivan, ostale vrijednosti su negativne **c)** sinus i kosinus su negativni, a tangens i kotangens pozitivni **d)** kosinus je pozitivan, ostale vrijednosti su negativne.

3. a) vidi točke A i B i pripadne lukove **b)** točke C i D i pripadni lukovi **c)** točke E i F i pripadni lukovi **d)** točke G i H i pripadni lukovi.



4. a) vidi točku A i pripadni luk **b)** vidi točku B i pripadni luk **c)** C **d)** D



5. a) 0.2 **b)** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

6. a) $\sin 95°45' = 0.9950$ **b)** $\cos 58.55° = 0.5163$ **c)** $tg\, 32°15'25'' = 0.6311$ **d)** $ctg 71°5' = 0.3443$

7. a) $\alpha = 32°55'20''$ **b)** $\alpha = 137°26'$ **c)** $\alpha = 69°19'32''$ **d)** $\alpha = 16°55'52''$

8.

	točka	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
a)	$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
b)	$\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right)$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{\sqrt{7}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{7}}{7}$	$-\frac{\sqrt{7}}{3}$
c)	$\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
d)	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

MATRICE

Tijekom dana kafić, slastičarnica, restoran i trgovina imaju sljedeće iznose zarade izražene u tisućama kuna:

	kafić	slastičarna	restoran	trgovina
0 h – 8 h	4	1	0	1
8 h – 16 h	7	2	−2	3
16 h – 24 h	14	7	1	10

Pravokutna shema realnih brojeva kojom su prikazani ovi podatci zove se matrica, a brojevi koji je čine jesu komponente ili elementi te matrice. Matrice označavamo velikim slovima: A, B, C, ...

Pravokutna shema realnih brojeva s m redaka i n stupaca zove se ***m* × *n* matrica**.

Za takvu matricu kažemo da je tipa $m \times n$.

Ako matrica ima jednak broj redaka i stupaca zove se **kvadratna matrica**.

Dvije matrice jednake su ako su istoga tipa i ako su im odgovarajuće komponente (tj. one koje se nalaze na istim pozicijama) jednake.

PRIMJER

1. Matrica $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -2 & 3 \\ 14 & 7 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ tipa je 3×4, a matrica $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ tipa 2×2.

Matrica B kvadratna je jer ima jednak broj redaka i stupaca.

2. Ako je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, tada je $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$.

ZADATAK

1. Kojega su tipa sljedeće matrice?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Napiši četiri matrice različitih tipova od kojih su dvije kvadratne, a dvije nisu.

3. Napiši po dvije matrice tipa 2×3, 3×1, 2×4, 4×2, 2×2 i 1×1.

4. U zadanoj matrici, koja je komponenta u zadanome retku i stupcu?

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) 1. retku i 2. stupcu
b) 4. retku i 1. stupcu
c) 2. retku i 3. stupcu
d) 2. retku i 1. stupcu
e) 3. retku i 3. stupcu
f) 3. retku i 2. stupcu

Dijagonalu kvadratne matrice čine njezine komponente koje se nalaze u 1. retku i 1. stupcu, 2. retku i 2. stupcu itd.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nul-matrica jest matrica kojoj su sve komponente 0.

Dijagonalna matrica kvadratna je matrica kojoj su sve komponente izvan dijagonale 0.

Jedinična matrica dijagonalna je matrica kojoj su sve dijagonalne komponente 1.

Gornjotrokutasta matrica kvadratna je matrica kojoj su sve komponente ispod dijagonale 0.

Donjotrokutasta matrica kvadratna je matrica kojoj su sve komponente iznad dijagonale 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gornjotrokutasta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

donjotrokutasta

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

dijagonalna

ZADATAK

5. Napiši nul-matricu tipa 2×3 i jediničnu matricu tipa 3×3. Može li jedinična matrica biti tipa 2×3? Obrazloži.

6. Napiši tri različite dijagonalne matrice tipa 4×4. Može li dijagonalna matrica biti tipa 4×3? Obrazloži.

7. Je li jedinična matrica dijagonalna? Je li nul-matrica dijagonalna?

8. Napiši tri različite matrice tipa 4×4 koje su:

a) gornjotrokutaste

b) donjotrokutaste.

9. Može li trokutasta matrica biti tipa 4×3? (Trokutastom matricom zovemo onu koja je gornjotrokutasta ili donjotrokutasta.)

10. Koje je vrste matrica?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$

ZBRAJANJE I ODUZIMANJE MATRICA

Matrice možemo množiti brojem, zbrajati ih i oduzimati.

Matrica se množi brojem tako da se svaka njezina komponenta pomnoži tim brojem. Matrice se mogu zbrojiti ili oduzeti samo ako su istoga tipa i tada se zbrajaju ili oduzimaju tako da im se zbroje ili oduzmu odgovarajuće komponente.

PRIMJER 3.

$$3\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3\\ 3\cdot 0 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 9\\ 0 & 3 & -6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & 2+2 & 3-1\\ 0+3 & 1+4 & -2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-0 & 2-2 & 3+1\\ 0-3 & 1-4 & -2-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ -3 & -3 & -4\end{bmatrix}.$$

ZADATAK

11. Zadane su matrice

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\\ -1 & 6\end{bmatrix}\text{ i }\quad H=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Ako je moguće, izračunaj:

a) $A+B$ b) $A+C$ c) $C+F$ d) $D-F$ e) $E+3F$

f) $2B-A$ g) $A-H$ h) $H+B$ i) $C+G+F$ j) $A+2H+3B$.

12. Ako su matrice A i B istoga tipa, je li onda uvijek $A+B=B+A$? Zašto?

13. Za koju matricu X vrijedi $A+X=A$?

14. Kakvu matricu dobijemo zbrajanjem ili oduzimanjem:

a) dijagonalnih

b) gornjotrokutastih

c) donjotrokutastih matrica?

MNOŽENJE MATRICA

Najprije ćemo objasniti kako se množi redak (matrica tipa $1 \times n$) sa stupcem (matricom tipa $n \times 1$). Za $n = 4$ to izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \end{bmatrix}$$

ZADATAK

15. Pomnoži sljedeće retke i stupce ako je to moguće:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Sada možemo objasniti kako se množe matrice.

Matrice A i B množe se tako da se retci od A množe sa stupcima od B.

U i-ti redak i k-ti stupac od AB ide umnožak i-toga retka od A s k-tim stupcem od B.

Da bi se dvije matrice mogle pomnožiti, one moraju biti **ulančane**, tj. broj stupaca prve matrice mora odgovarati broju redaka druge matrice.

Dakle, ako je matrica A tipa $m \times n$, B mora biti tipa $n \times k$, a umnožak će biti matrica tipa $m \times k$.

PRIMJER **4.**

$$\underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2\cdot1+3\cdot0+1\cdot1 & 2\cdot2+3\cdot1+1\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot0+2\cdot1 & 0\cdot2+1\cdot1+2\cdot1 \\ 3\cdot1+0\cdot0+2\cdot1 & 3\cdot2+0\cdot1+2\cdot1 \end{bmatrix} = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}}$$

ZADATAK

16. Pomnoži matrice:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

ZADATAK

17. Zadane su matrice:

$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}$,

$D=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$.

Ako je moguće, izračunaj:

a) AB b) AC c) AD d) BE e) CD f) CE

g) EF h) FE i) DB j) AF k) CF l) BD.

Sustave linearnih jednadžbi s više nepoznanica možemo prikazati uz pomoć matrica kao jednu matričnu jednadžbu.

PRIMJER

5. Prikažimo zadani linearni sustav od tri jednadžbe kao jednu matričnu jednadžbu.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0\\ 2x_2-8x_3=8\\ -4x_1+5x_2+9x_3=-9\end{cases}$$

Rješenje

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ -4 & 5 & 9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-2x_2+x_3\\ 2x_2-8x_3\\ -4x_1+5x_2+9x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 8\\ -9\end{bmatrix}$$

Dva posljednja stupca (tj. dvije posljednje 3×1 matrice) jednake su ako su njihove tri komponente jednake. Njihovim izjednačavanjem dobivamo početni sustav. To znači da je on isto što i matrična jednadžba

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ -4 & 5 & 9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 8\\ -9\end{bmatrix}.$$

Tako se svaki linearni sustav od više jednadžbi može prikazati kao jedna jedina matrična jednadžba

ZADATAK

18. Zadani sustav od više jednadžbi prikaži kao jednu matričnu jednadžbu.

$$\begin{cases} x_2-4x_3=8\\ 2x_1-3x_2+2x_3=1\\ 5x_1-8x_2+7x_3=1\end{cases}$$

19. Zadanu matričnu jednadžbu prikaži kao sustav od više jednadžbi.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$$

PRIMJER **6.**

Populacija sadrži tri skupine s početnom razdiobom u lijevoj tablici. Svake godine iz skupine u skupinu prijeđu određeni postotci tih skupina, dani u desnoj tablici.

skupina I	30 % = 0.3
skupina II	20 % = 0.2
skupina III	50 % = 0.5

iz I	iz II	iz III	
0.8	0.1	0	u I
0.1	0.7	0.1	u II
0.1	0.2	0.9	u III

Kako se razdioba populacije po skupinama mijenja iz godine u godinu?

Rješenje

Nakon 1. godine novi raspored populacije po skupinama izgleda ovako:

$$\begin{array}{l} \text{u I.} \\ \text{u II.} \\ \text{u III.} \end{array}\begin{bmatrix} 0.8\cdot 0.3+0.1\cdot 0.2+0\cdot 0.5 \\ 0.1\cdot 0.3+0.7\cdot 0.2+0.1\cdot 0.5 \\ 0.1\cdot 0.3+0.2\cdot 0.2+0.9\cdot 0.5 \end{bmatrix}$$

No, to lako možemo prepoznati kao umnožak 3×3 matrice prelaza iz skupine u skupinu i 3×1 stupaca početne razdiobe:

$$=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Označimo matricu prelaza s P i stupac početne razdiobe s $x_{0.}$

Nakon 1. godine razdioba će biti $x_1 = Px_0$.

Nakon 2. godine razdioba će biti $x_2 = Px_1 = PPx_0 = P^2x_0$.

Nakon 3. godine razdioba će biti $x_3 = Px_2 = PP^2x_0 = P^3x_0$.

Općenito, nakon n godina razdioba će biti P^nx_0.

ZADATAK **20.**

Izračunaj razdiobu populacije po skupinama nakon 1., 2. i 3. godine.

21.

Početna razdioba populacije u lijevoj je tablici, a postotci godišnjih prelaza iz skupine u skupinu nalaze se u desnoj.

grupa I	60% = 0.6
grupa II	40% = 0.4

Iz I	Iz II	
0.8	0.3	u I
0.2	0.7	u II

Kako se razdioba populacije po skupinama mijenja iz godine u godinu? Kakva je razdioba nakon 1, 2 i 3 godine?

ZADATCI

22. Petra planira vrijeme učenja za ispite iz Matematike, Kemije i Biologije. U svakome od tih predmeta ima tri poglavlja koja mora naučiti. Zaključila je da joj za prvo poglavlje iz Matematike trebaju 4 sata, za drugo 2 sata i za treće 3 sata. Za Kemiju joj po poglavljima trebaju redom 3, 3 i 1 sat, a za Biologiju 3, 2 i 2 sata. Prikaži podatke matricom.

23. Jesu li sljedeće matrice jednake? Obrazloži.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

24. Ako je $\begin{bmatrix} a & 1 \\ b-2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, odredi realne brojeve a i b.

25. Izračunaj.

a) $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, izračunaj:

a) $2A$ b) $A - B$ c) $A + C$ d) $2A + B - C$.

27. Odredi nepoznate veličine.

a) $\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & y \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 7 \\ z & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & b \\ a & 2 \end{bmatrix} - m\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

28. Odredi matricu X ako je:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

29. Ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, odredi matricu B tako da zbroj $A + B$ bude:

a) nul-matrica b) jedinična matrica
c) dijagonalna matrica d) gornjotrokutasta matrica
e) donjotrokutasta matrica.

30. Matrica A tipa je 2×3, a matrica B tipa 3×1. Koji je od umnožaka $A \cdot B$ ili $B \cdot A$ moguće izračunati i kojega će tipa biti taj umnožak?

31. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, izračunaj umnožak:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$.

ZADATCI

32. Matrica A tipa je 3×4, a matrica B tipa $n\times k$. Odredi brojeve n i k tako da je moguće izračunati i umnožak $A\cdot B$ i umnožak $B\cdot A$.

33. Izračunaj.

a) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-0.2 & 0.5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}100\\ 200\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$

34. Odredi nepoznate veličine.

a) $\begin{bmatrix}2 & x\\ y & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 15\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b & c\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 8\\ -2 & d\end{bmatrix}$

35. Ako je $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}x & 0\\ 5 & 3\end{bmatrix}$ i $AB=BA$, odredi broj x.

36. Ako je $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, odredi A^2, A^3, A^4.

37. Odredi broj k ako je:

a) $A=\begin{bmatrix}k & 1\\ 1 & -k\end{bmatrix}$ i $A^2=5\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}7 & 7\\ -2 & -2\end{bmatrix}$ i $A^2=kA$.

38. Marko i Sven kupuju u dvije različite trgovine A i B. Marko želi kupiti 1 kg kobasica, 2 sladoleda i 2 l soka od naranče, a Sven želi kupiti 1 kg kobasica, 3 sladoleda i 3 l soka od naranče. U trgovini A kilogram kobasica stoji 55 kn, sladoled 10 kn, a litra soka 11 kn. U trgovini B kilogram kobasica stoji 49 kn, sladoled 11 kn, litra soka 12 kn.

a) Prikaži podatke o broju artikala koje Marko i Sven žele kupiti u matrici potraživanja P, tipa 3×2.

b) Prikaži podatke o cijeni artikala koje Marko i Sven žele kupiti u matrici troškova C, tipa 2×3.

c) Izračunaj umnožak PC.

d) Koliki je ukupni trošak za Marka u trgovini A, a koliki je trošak za Svena u trgovini B?

39. Učenici na početku školske godine biraju fakultativnu nastavu iz matematike, fizike ili kemije. U jednoj školi je 50 % učenika odabralo matematiku, 10 % fiziku i 40 % kemiju. Nakon dva tjedna nastave mogu još promijeniti izbor. Tako se 20 % učenika koji su prvo birali matematiku ipak prebacilo na fiziku i 10 % na kemiju, od onih koji su odabrali fiziku 20 % je prešlo na matematiku i 10 % na kemiju, a s kemije se 30 % prebacilo na matematiku i 10 % na fiziku.

a) Napiši stupac početne razdiobe učenika po predmetima i matricu prelaza.

b) Izračunaj konačnu razdiobu učenika po predmetima.

DETERMINANTE

Svakoj kvadratnoj matrici pridružen je broj koji zovemo njezinom **determinantom.**

Determinantu 2 × 2 matrice, tj. determinantu 2. reda, definiramo na sljedeći način (uočite da matrice označavamo zagradama, a njihove determinante ravnim crtama):

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

PRIMJER

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 4\cdot 3 = -10 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot 3 - 0\cdot 2 = -3$$

ZADATAK

1. Izračunaj determinante matrica.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

Determinantu 3 × 3 matrice, tj. determinantu 3. reda, definiramo na sljedeći način:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Taj se postupak zove „razvijanje determinante po prvome retku”.

a množimo s determinantom matrice koja ostaje nakon brisanja retka i stupca od *a*.

b množimo s determinantom matrice koja ostaje nakon brisanja retka i stupca od *b*.

c množimo s determinantom matrice koja ostaje nakon brisanja retka i stupca od *c*.

Predznake određujemo po shemi koja se lako pamti; počinjemo s + i dalje u oba smjera alterniramo – i + (v. desnu shemu). Mogli smo razvijati po nekome drugom retku ili stupcu i dobili bi isto.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

PRIMJER

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 + 1\cdot(-6-2) + 2\cdot 0 = -8$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-6-2) = -8$$

Na jednak se način računaju i determinante višega reda.

PRIMJER

3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -5(-2) + 2(-3) - 2\cdot 19 + 3\cdot 25 = 41$$

ZADATAK

2. Provjeri imaju li determinante trećega reda u prethodnome računu vrijednosti -2, -3, 19 i 25.

3. Izračunaj sljedeće determinante.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Posebno je jednostavno računati determinantu trokutaste matrice:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot 2\cdot(-4) = -120$$

Determinanta trokutaste matrice jednaka je umnošku brojeva na njezinoj dijagonali. Kad bismo računanje determinanti mogli svesti na računanje determinanti trokutastih matrica, sve bi bilo jednostavno. To nam omogućuju sljedeća pravila.

(I) Iz retka ili stupca determinante može se izlučiti zajednički faktor.

$$\begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ kg & kh & ki \end{vmatrix}$$

PRIMJER

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 125 & -8 \\ 0 & -250 & 20 \\ -9 & 375 & 12 \end{vmatrix} = 125\begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 20 \\ -9 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 125\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 20 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 125\cdot 3\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15000$$

ZADATAK **4.** Razvijanjem opće determinante 3. reda po stupcu sa zajedničkim faktorom k dokaži da pravilo vrijedi za taj slučaj.

(II) Ako je redak (ili stupac) determinante jednak zbroju dvaju redaka (ili stupaca), onda je i determinanta jednaka zbroju odgovarajućih determinanti.

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

ZADATAK **5.** Razvijanjem opće determinante trećega reda, po retku koji je zbroj dvaju redaka, dokaži da pravilo vrijedi za taj slučaj.

(III) Determinanta s dva ista retka ili stupca ima vrijednost 0.

To ćemo svojstvo dokazati. Svojstvo očito vrijedi za determinante 2. reda:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

Ako determinantu 3. reda, s dva ista retka, razvijemo po trećemu retku, sve determinante 2. reda u tome su razvoju jednake 0 (jer imaju dva ista retka) pa je i početna determinanta jednaka 0:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ e & f \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ d & f \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Ako determinantu 4. reda, s dva ista retka, razvijemo po nekome trećem retku, sve determinante 3. reda u tome su razvoju jednake 0 (jer imaju dva ista retka) pa je i početna determinanta jednaka 0; i tako dalje za svaki red.

(IV) Ako retku (ili stupcu) determinante dodamo neki drugi redak (ili stupac) te determinante pomnožen nekim faktorom *k*, vrijednost determinante neće se promijeniti.

I to ćemo svojstvo dokazati: Prema (II) i (III) svojstvu, nova se determinanta može prikazati kao zbroj stare determinante i determinante s dva ista retka iz koje je izlučen faktor k. No, ta druga determinanta ima vrijednost 0 pa nova i stara determinanta imaju istu vrijednost.

PRIMJER

5. $$\begin{vmatrix} 2019 & 2020 & 2021 \\ 2022 & 2023 & 2024 \\ 2025 & 2026 & 2036 \end{vmatrix} \overset{1.}{=} \begin{vmatrix} 2019 & 2020 & 2021 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 15 \end{vmatrix} \overset{2.}{=}$$

$$\overset{2.}{=} \begin{vmatrix} 2019 & 2019 & 2019 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + (-27) = -27$$

U 1. smo koraku prvi redak pomnožili s -1 i dodali ga drugomu i trećemu retku.

U 2. smo koraku drugi redak pomnožili s -2 i dodali ga trećemu retku te potom iskoristili činjenicu da je $(2019, 2020, 2021) = (2019, 2019, 2019) + (0, 1, 2)$.

Ako u trećoj determinanti izlučimo 2019 iz prvoga retka i 3 iz drugoga retka, dobit ćemo determinantu s dva ista retka samih jedinica. Zato ona ima vrijednost 0.

(VI) Ako dva retka (ili stupca) zamijene mjesta, determinanta mijenja predznak.

Dokažimo i to svojstvo. Pokazat ćemo da je zbroj dviju determinanti 3. reda kojima smo zamijenili prva dva retka jednak 0. Dokaz u općemu slučaju ide analogno.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+a_1 & b_2+a_2 & b_3+a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

I to pravilo olakšava računanje determinanti.

PRIMJER

6. $$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -30$$

ZADATAK

6. Svođenjem na trokutastu determinantu izračunaj:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 17 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \\ -7 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

ZADATCI

7. Izračunaj determinante.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2 & -2\sqrt{2} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 2^9 \\ 10 & 2^{10} \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \\ 2 & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & \frac{2}{a} \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ a^4 & a^5 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} a-1 & a+1 \\ a+1 & a-1 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} \sqrt{a}-1 & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & \sqrt{a}+1 \end{vmatrix}$

8. Izračunaj determinante.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 13 & 23 & 13 \\ 12 & -22 & 12 \\ 11 & 24 & 11 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3^6 & 3^7 & 3^8 \\ 3^9 & 3^{10} & 3^{11} \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

9. Izračunaj determinante primjenjujući svojstva determinanti.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 0 \\ \frac{2}{a^3} & \frac{2}{a^2} & -\frac{2}{a} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & b & 1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ b & b & b \\ a & b & a \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

10. Odredi nepoznate veličine.

a) $\begin{vmatrix} 11 & a \\ 10 & a-2 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x-10 & x-20 \\ x-30 & x-40 \end{vmatrix} = x-50$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7$

11. Navedi dva primjera trokutaste matrice čija je determinanta jednaka:

a) 6 b) -150 c) x^3 d) $(x-2)^2$.

12. Jesu li sljedeće determinante jednake? Obrazloži.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ a & b & c \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \\ 10 & 12 & 14 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2+a & 3+b & 4+c \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} a & b & c-2a \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix}$

13. Izračunaj na najkraći mogući način.

a) $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 10 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 10 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 100 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 100 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

14. Pokaži da se determinanta ne mijenja ako se u njoj zamijene uloge redaka i stupaca.

SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI

Promotrimo sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice čija je determinanta $D \neq 0$:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zbog svojstava determinanti vrijedi:

$$xD = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D_1 \Rightarrow x = \frac{D_1}{D}.$$

Analogno nalazimo $y = \frac{D_2}{D}$ i $z = \frac{D_3}{D}$, gdje se determinanta D_i dobije iz determinante D zamjenom njezina i-toga stupca stupcem slobodnih koeficijenata. Općenito vrijedi:

Cramerovo pravilo

Sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica $x_1, \ldots, x_n$ i determinantom $D \neq 0$ ima jedno jedino rješenje:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D} \ldots x_n = \frac{D_n}{D}$$

(determinanta D_i dobije se iz D zamjenom njezina i-toga stupca stupcem slobodnih koeficijenata).

Ako je $D = 0$, onda sustav nema rješenje ili ih ima beskonačno mnogo.

PRIMJER 1.

Uz pomoć Cramerova pravila riješimo sustav:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Rješenje

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8,\ D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

Dakle, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{4} = 1,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{8}{4} = 2,\ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-8}{4} = -2.$

ZADATAK 1.

Uz pomoć Cramerova pravila riješi sustave.

a) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 3 \\ -7x_1 + 12x_2 = -10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ 6x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = -1 \\ -2x_1 + 12x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

Gauss-Jordanova metoda

Cramerovim pravilom rješavamo sustave linearnih jednadžbi koji imaju jednak broj jednadžbi i nepoznanica i kojima je determinanta $\neq 0$. Ako to nije slučaj, upotrebljavamo Gauss-Jordanovu metodu, koju ilustriramo na primjeru sustava od 3 linearne jednadžbe s 5 nepoznanica.

PRIMJER

2. Riješimo sustav:

$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ \qquad 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \end{cases}.$$

Sustav možemo prikazati proširenom matricom sustava:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right].$$

Pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi znamo da na njegovo rješenje neće utjecati ako jednadžbe zamjene redoslijed, ako jednadžbu pomnožimo realnim brojem različitim od 0 ili ako jednadžbu, pomnoženu brojem, dodamo nekoj drugoj jednadžbi.

Stoga su dozvoljene sljedeće **elementarne transformacije** na proširenoj matrici:

- zamjena redaka
- množenje retka realnim brojem različitim od 0
- dodavanje retka pomnoženoga brojem nekomu drugom retku.

Ako prvi redak pomnožimo s -1 i dodamo ga drugomu retku, dobit ćemo matricu u kojoj prvi redak počinje s manje nula (u ovom slučaju s nijednom) nego sljedeći redci:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right].$$

Ako sada drugi redak pomnožimo s $-3/2$ i dodamo ga trećemu retku, dobit ćemo matricu u kojoj drugi redak počinje s manje nula (u ovome slučaju s jednom) nego sljedeći redci:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right].$$

Tako smo dobili matricu u kojoj svaki redak počinje s više nula nego prethodni. Za takvu matricu kažemo da je u **ešalonskome** obliku i iz nje je lako očitati rješenje sustava. Pokušajte sami!

Mi ćemo nastaviti s elementarnim transformacijama koje će dovesti do još jednostavnijega oblika. Prvo ćemo dijeljenjem svakoga retka s njegovom prvom komponentom različitom od nule doći do ešalonskoga oblika, u kojemu svaki redak kao prvu nenul-komponentu ima 1 (lijeva matrica).

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right]$$

Zatim ćemo poništiti sve komponente koje su iznad tih početnih 1 tako da drugi red pomnožimo s −3 i dodamo prvomu, a treći pomnožimo s −1 i −2 te ih dodane drugomu i prvomu (desna matrica).

Konačno smo došli do **reduciranoga** *ešalonskog* oblika u kojem svaki redak počinje s više nula nego prethodni, u kojemu je prva nenul-komponenta 1 i u kojemu su sve komponente iznad tih prvih jedinica nule. Iz tako reduciranoga sustava lako je očitati rješenje:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= 24 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -7 \\ x_5 &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 2x_3 - 3x_4 - 24 \\ x_2 &= 2x_3 - 2x_4 - 7 \\ x_5 &= 4 \end{aligned}.$$

Dakle, x_3 i x_4 mogu biti bilo koji realni brojevi, a x_1, x_2 i x_5 određeni su gornjim jednadžbama. Na primjer, za $x_3 = 1$ i $x_4 = 0$ imamo $x_1 = -22$, $x_2 = -5$ i $x_5 = 4$, tj. $(-22, -5, 1, 0, 4)$ jedno je od beskonačno mnogo rješenja zadanoga sustava.

PRIMJER 3.

Riješimo sustav.

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

Rješenje

Nakon zamjene prvoga i drugoga retka imamo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & -3/2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array}\right].$$

Zadnji redak znači da je $0 = 5/2$, što je neistina. Dakle, sustav nema rješenja.

ZADATAK 2.

Riješi sustave Gauss-Jordanovom metodom.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 = 6 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

ZADATCI

3. Cramerovim pravilom riješi sustave.

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_1 - 4x_2 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -6. \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 17 \end{cases}$

4. Za koje realne brojeve a sljedeći sustavi imaju jedinstveno rješenje?

a) $\begin{cases} 3x_1 + ax_2 = 2 \\ ax_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax_1 + 3x_2 + 3x_3 = -1 \\ -ax_1 - x_2 - ax_3 = a - 1 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + x_3 = a + 1 \\ -x_1 + ax_2 + 5x_3 = -5 \\ 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 5 + a \end{cases}$

5. Odredi realan broj a tako da sljedeći sustav nema jedinstveno rješenje.

Ima li sustav tada beskonačno mnogo rješenja ili nijedno?

a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ (a-2)x_1 + x_2 = a \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = a \end{cases}$ c) $\begin{cases} (3-a)x_1 - x_2 = -2a \\ -ax_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

6. Koje su od matrica u ešalonskome obliku?

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right]$ d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

7. Riješi sustave Gauss-Jordanovom metodom.

a) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -3 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -12 \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

JESMO LI RAZUMJELI?

1. Koja je matrica gornjotrokutasta?

A. $\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 1 & 3\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\0 & 2 & 4\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 2 & 0\\5 & 4 & 3\end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\2 & 3 & 3\\2 & 2 & 3\end{bmatrix}$

2. Koja je matrica donjotrokutasta?

A. $\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 1 & 3\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\0 & 2 & 4\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 2 & 0\\5 & 4 & 3\end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\2 & 3 & 3\\2 & 2 & 3\end{bmatrix}$

3. Rezultat množenja matrice tipa 4 x 5 s matricom tipa 5 x 4 jest matrica tipa:

A. 4 x 4 B. 4 x 5 C. 5 x 4 D. 5 x 5.

4. Rezultat množenja $\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\end{bmatrix}$ jest:

A. $\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix}a & 1-a\\2 & 3\end{vmatrix}=$

A. $a-2$ B. $a+2$ C. $5a-2$ D. $5a+2$.

6. Za koji realni broj a vrijedi $\begin{vmatrix}a+3 & a\\a-5 & a-3\end{vmatrix}=6$?

A. -3 B. -1 C. 3 D. 4

7. Za koji realni broj a sustav $\begin{cases}-ax_1+9x_2=9\\x_1-ax_2=3\end{cases}$ nema rješenje?

A. -3 B. ±3 C. 3 D. 9

8. Za koji realni broj a sustav $\begin{cases}(a^2-9)x_1-x_2=4\\-7x_1+x_2=a\end{cases}$ ima beskonačno mnogo rješenja?

A. -4 B. ±4 C. 4 D. 16

9. Jednakost $\begin{vmatrix}1 & 3-x\\3 & 2x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix}$ vrijedi za:

A. $x=1$ B. $x=2$ C. $x=3$ D. $x=4$.

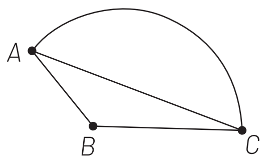
ZADATCI ZA PONAVLJANJE

1. Trgovina računalnom opremom u listopadu je prodavala tri vrste pisača, P1, P2 i P3, po akcijskim cijenama. Broj prodanih pisača (redom prema vrsti) bio je 13, 22, 16 u prvome tjednu, 10, 20, 11 u drugome tjednu, 9, 12, 6 u trećemu i 12, 1, 14 u četvrtome tjednu.

a) Prikaži podatke o prodaji matricom tipa 4×3.

b) Ako su cijene pisača redom 1199, 399 i 899 kuna, prikaži podatke o cijenama matricom 3×1.

2. Graf prikazuje kartu cesta kojima su povezana tri grada.



Kvadratnom matricom prikaži broj izravnih veza između svaka dva grada.

3. Odredi nepoznate veličine tako da sljedeće matrice budu jednake:

a) $\begin{bmatrix} 2 & y-1 \\ x & 5 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 3+y \\ 0 & 2-x \\ x & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} y+4 & z \\ 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Odredi X ako je:

a) $-\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $3X + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 2\left(X - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

5. Odredi matrice A i B za koje su obje jednakosti istinite:

a) $\begin{aligned} A - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} + 2B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 2B &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2(A-B) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}B \\ -A + \frac{5}{2}B &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$.

6. Izračunaj:

a) $\begin{bmatrix} 10 \\ -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Izračunaj nepoznanice:

a) $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & z \\ -7 & y \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

8. Ako je $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, odredi A^2, A^3, A^4.

9. Ako je $A = \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ i $A^2 = kA$, odredi broj k.

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

10. Matrica A prikazuje rezultate natjecanja za 4 tima. Svaki redak predstavlja rezultate za jedan tim. Stupci prikazuju broj pobjeda, broj neriješenih rezultata i broj poraza. Matrica B prikazuje koliko bodova donose pobjeda, neriješeno i poraz.

$A=\begin{bmatrix}1&3&2\\2&2&2\\3&1&2\\4&0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$. Odredi umnožak AB i protumači ga.

11. U trgovini se tijekom tjedna vodila evidencija o prodaji četiriju artikala. Rezultati su prikazani lijevom matricom. Matrica cijena pojedinih artikala (u kn) prikazana je desno. Prikaži matricom tipa 6 × 1 prihod (u kn) po danima.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}A_1 & A_2 & A_3 & A_4\end{array}\\ \begin{array}{c}Po\\Ut\\Sr\\Če\\Pe\\Su\end{array} & \begin{bmatrix}11&3&3&10\\20&0&2&9\\21&3&6&12\\22&2&3&8\\35&6&8&10\\42&10&12&24\end{bmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{c}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{array}\begin{bmatrix}20\\50\\65\\25\end{bmatrix}$$

12. Izračunaj sljedeće determinante primjenjujući svojstva determinanti:

a) $\begin{vmatrix}a&2a&3a\\1&1&1\\2&2&2\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1&2a&3a&4a\\0&2&3a&4a\\0&0&3&4a\\0&0&0&4\end{vmatrix}$.

13. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix}8&6\\4&3\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}\sqrt[3]{4}&-5\\-1&\sqrt[3]{2}\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}1&2^3\\2^5&2^9\end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix}\sqrt{3}-1&-2\\\sqrt{3}&\sqrt{3}-1\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}\frac{a}{3}&-\frac{3}{a}\\\frac{a}{6}&\frac{1}{a}\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}a^{20}&-a^{30}\\a^{-30}&a^{-20}\end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix}a&-b\\a+b&a-b\end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix}\sqrt{a}+\sqrt{b}&2\\\sqrt{ab}&\sqrt{a}+\sqrt{b}\end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix}2&-3&4\\0&-2&1\\1&0&-3\end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{2}&1\\2&0&-3\\1&0&3\end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix}20&30&40\\100&150&200\\100&300&200\end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix}0&-\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\0&0&25\end{vmatrix}$.

14. Odredi nepoznate veličine:

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a-3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a+5$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & -1 & 0 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 10.$

15. Riješi nejednadžbe:

a) $\begin{vmatrix} x^2 & 3x \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \le \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 2 & x \end{vmatrix} \ge \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ x & x \end{vmatrix}.$

16. Riješi sljedeće sustave:

a) $\begin{cases} 11x_1 + 5x_2 = -2 \\ 9x_1 + 4x_2 = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -5 \\ 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 7x_1 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

17. U ovisnosti o realnom broju a raspravi o rješenju sustava:

a) $\begin{cases} 4ax_1 - x_2 = -2 \\ -x_1 + ax_2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2a^2x_1 + ax_2 = 4 \\ 8x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6ax_1 - x_2 = -6 \\ 2x_1 - 3ax_2 = a^2 \end{cases}.$

18. Učenici jedne škole na kraju godine ispunjavaju anketu o navikama učenja. Nakon prvog razreda, rezultati su pokazali da 40 % učenika prosječno dnevno uči manje od jednog sata (skupina A), 30 % 1 – 2 sata (skupina B) i 30 % više od 2 sata (skupina C). Nakon 2. razreda primijećeni su prelasci iz jedne u drugu skupinu: iz A u B 30 % učenika, a u C 10 % učenika, iz B u A 10 %, u C 20 % i iz C u A nitko, a u B 10 %.

a) Napiši stupac početne razdiobe učenika po skupinama i matricu prelaza.

b) Izračunaj konačnu razdiobu učenika po skupinama nakon drugog razreda.

c) Ako matrica prelaza ostaje ista, izračunaj konačnu razdiobu učenika po skupinama nakon 3. i nakon 4. razreda.

RJEŠENJA

10. a) $\left\langle -\frac{1}{3}, 1\right\rangle$ **b)** $\langle -3, 2\rangle$ **c)** $\left\langle -\frac{1}{3}, 1\right\rangle$ **d)** $\langle -2, 1\rangle$ **e)** $\langle -\infty, -3\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{4}, \infty\right\rangle$ **f)** $\left\langle \frac{3}{2}, 7\right]$ **g)** $\left\langle -\infty, \frac{1}{5}\right] \cup \left\langle \frac{1}{2}, \infty\right\rangle$ **h)** $\left\langle -\infty, \frac{2}{5}\right] \cup \langle 1, \infty\rangle$

11. a) $\langle -\infty, -3\rangle \cup \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$ **b)** $\left[\frac{3}{2}, 2\right]\langle 5, \infty\rangle$ **c)** $\langle -\infty, -1\rangle \cup [2, 3\rangle \cup [5, \infty\rangle$ **d)** $[-5, -2\rangle \cup [2, 3\rangle$ **e)** $x \in \langle -7, -3\rangle \cup \langle 1, 5\rangle$ **f)** $\left\langle -5, \frac{1}{2}\right] \cup \left\langle \frac{2}{3}, 3\right]$ **g)** $\left\langle -\infty, \frac{1}{3}\right\rangle \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right] \cup \langle 3, \infty\rangle$ **h)** $x \in \langle -2, 2\rangle$ **i)** $x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 0, 4\rangle$

12. a) $T_1(-1, -6)$, $T_2(-3, -2)$ **b)** $T\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ **c)** Nema zajedničkih točaka. **d)** $T(-6, 24)$ **e)** $T_1(2, 11)$, $T_2(3, 19)$ **f)** Nema zajedničkih točaka. **g)** $T(1, -2)$ **h)** $T_1(0, 0)$, $T_2\left(-\frac{13}{9}, -\frac{26}{27}\right)$ **i)** $(3, -1)$, $(-3, -7)$

13. a) $\langle 0, 4\rangle$ **b)** $\langle -1, 1\rangle$ **c)** $\left\langle -\infty, -\frac{5}{3}\right\rangle$

14. a) $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$ **b)** $\langle 2, \infty\rangle$ **c)** $\langle 4, \infty\rangle$

15. 97.24 milje na sat.

16. Lopta će za 2.5 sekunde doseći maksimalnu visinu 31.625 metara.

17. Profit je maksimalan za 500 strojeva mjesečno. Tvornica počinje raditi s gubitkom ako proizvodi više od 1000 strojeva mjesečno.

18. $x = 40$ m $y = 20$ m.

19. 3.1 m

20. Maksimalna zarada je za 8 osoba, zarada po satu je 290 kuna.

21. Zarada je maksimalna za 25 osoba i iznosi 625 kuna.

22. Zarada je maksimalna za cijenu 3.80 kn.

23. a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 12$ **b)** 6 m **c)** 7.5 m

24. a) $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 3$ **b)** 8 m **c)** Približno 6.1 m.

25. a) $f(x) = -0.02x^2 + 0.72x$ **b)** Približno 22.3 m **c)** Da

26. a) $f(x) = 0.0084x^2 + 7$ **b)** 15.5 metra od tjemena.

5. MATRICE I DETERMINANTE

MATRICE

1. Matrice su redom tipa: 3×3 3×1 2×3 1×2 3×4 3×2

4. a) -7 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 0 **e)** -1 **f)** 2

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nul-matrica $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jedinična matrica. Jedinična matrica ne može biti tipa 2×3 jer mora biti kvadratna.

PRIKAZ PODATAKA

> ” *Statistički način mišljenja jednog će dana za svakodnevni život građana postati jednako nužan kao znanje čitanja i pisanja“*
> *H. G. Wells*
> *(1866. – 1946.)*

Svakodnevno se prikupljaju različiti podatci koji se dalje obrađuju. Pratimo cijene benzina, broj oboljelih od gripe, temperaturu zraka, broj učenika u prvome razredu...

Grana matematike koja prikuplja, analizira, tumači i prikazuje podatke naziva se statistika.

Skup iz kojega uzimamo podatke nazivamo populacija.

Podatci mogu biti numerički (izraženi brojem) ili nominalni (izraženi opisno, npr. vrste mobitela, marke automobila, sportovi...). Numeričke podatke dijelimo na diskretne i neprekinute. Podatci su diskretni ako ih dobivamo prebrojavanjem (broj učenika po uspjehu na kraju školske godine, broj glasača na izborima...), a neprekinuti ako ih dobivamo mjerenjem (temperatura mora, visina učenika u razredu...).

Broj pojavljivanja nekoga podatka naziva se njegovom frekvencijom. Udio podatka u cijeloj populaciji naziva se njegovom relativnom frekvencijom.

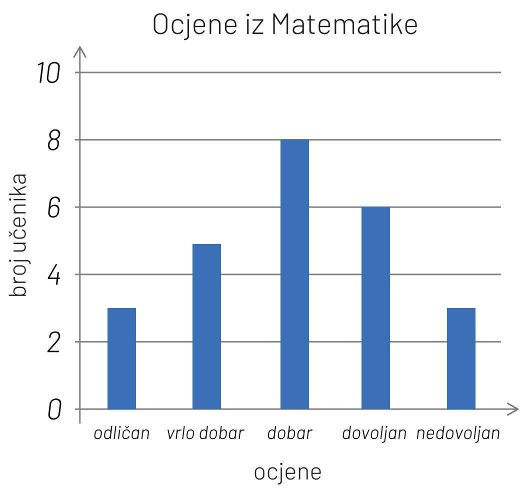
PRIMJER

1. Prvi razred ima 24 učenika. Svi su pisali test iz Matematike, troje učenika dobilo je ocjenu odličan, petero učenika vrlo dobar, osmero učenika ocjenu dobar, šestero učenika dobilo je ocjenu dovoljan i dvoje učenika ocjenu nedovoljan. Kako možemo prikazati te podatke?

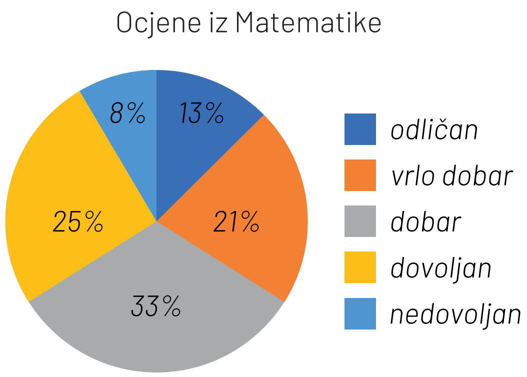
I. Tablicom:

Ocjena:	Frekvencija (broj učenika)	Relativna frekvencija
odličan	3	3/24 ili 13 %
vrlo dobar	5	5/24 ili 21 %
dobar	8	8/24 ili 33 %
dovoljan	6	6/24 ili 25 %
nedovoljan	2	2/24 ili 8 %

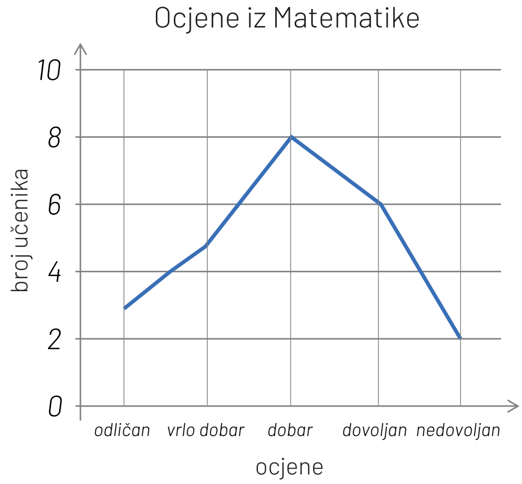
II. Stupčastim dijagramom:



III. Kružnim dijagramom (torta):



IV. Linijskim dijagramom:



Koji je način prikaza najbolji? Ovisi o tome što iz podataka želimo iščitati.

- Ako nas zanima koliko je učenika dobilo ocjenu nedovoljan, iz tabličnoga prikaza pročitamo da je to dvoje učenika.
- Želimo li znati koja je ocjena najzastupljenija (dobar), to ćemo najlakše uočiti iz stupčastoga ili linijskoga dijagrama.
- Kružnim dijagramom vrlo zorno predstavljamo relativne frekvencije.

Primijetimo da je u ovome primjeru najmanje pogodan prikaz linijskim dijagramom jer se radi o diskretnim podatcima.

ZADATAK

1. Portal „Volim životinje" pitao je svoje čitatelje koji im je najdraži kućni ljubimac. Njihovi odgovori prikazani su u tablici. Nadopuni tablicu relativnim frekvencijama.

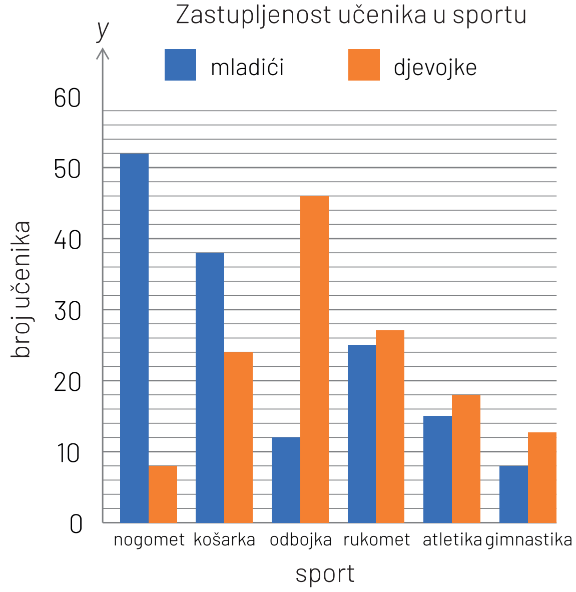
Prikaži podatke kružnim dijagramom i odgovori koliki je postotak ljubitelja pasa ili mačaka.

Kućni ljubimac	Broj osoba
pas	104
mačka	76
ptica	44
ribica	16

2. Anketiraj učenike u razredu i zapiši njihove visine te prikaži podatke linijskim dijagramom.

PRIMJER **2.**

Stupčastim dijagramom prikazano je kojim se sportovima bave učenice i učenici u sportskoj gimnaziji. Kojim se sportom bavi više učenica, a kojim više učenika?



Rješenje

Učenice se više bave odbojkom, rukometom, atletikom i gimnastikom, a učenici nogometom i košarkom.

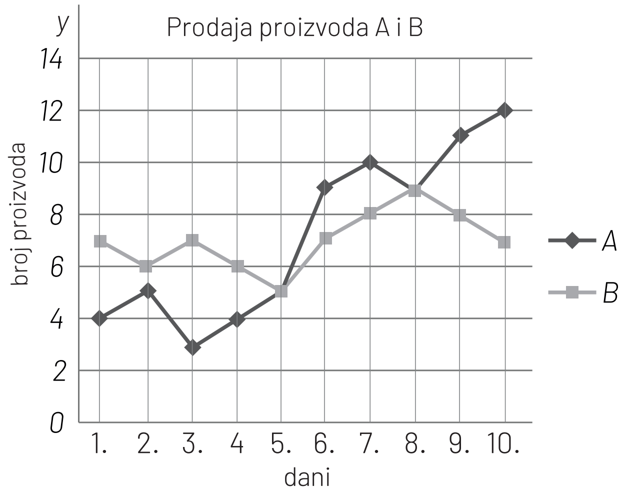
ZADATAK **3.**

U prvome razredu bilo je 7 odličnih, 12 vrlo dobrih i 5 dobrih učenika, a jedan je učenik upućen na produžnu nastavu. Isti razred u sljedećoj godini imao je 7 odličnih, 14 vrlo dobrih i 4 učenika s dobrim uspjehom. Uz pomoć stupčastoga dijagrama usporedi njihov uspjeh u dvije godine.

PRIMJER **3.**

Na linijskome grafikonu prikazana je prodaja po komadu dvaju konkurentskih proizvoda (A i B) u jednome trgovačkom centru tijekom 10. dana pred blagdane.

a) Koje je dane prodan jednak broj proizvoda A i B i koliko je to proizvoda?
b) Koje je dane prodano više proizvoda A, a koje dane više proizvoda B?
c) Koji je dan bila najveća razlika u broju prodanih proizvoda?



Rješenje

a) Peti dan prodano je 5 komada obaju proizvoda, a osmi dan 9 komada obaju proizvoda.
b) Proizvoda A prodano je više 6., 7., 9. i 10. dan, a proizvoda B 1., 2., 3. i 4. dan.
c) Najveća je razlika 10. dan, kad je prodano 5 komada više proizvoda A.

ZADATAK **4.**

Anketiraj učenike i učenice svojega razreda koji im je školski predmet najdraži i rezultate prikaži (dvostrukim) stupčastim i linijskim dijagramom.

Numeričke podatke o nekoj populaciji često grupiramo u intervale pa određujemo frekvencije za svaki od tih intervala.

PRIMJER

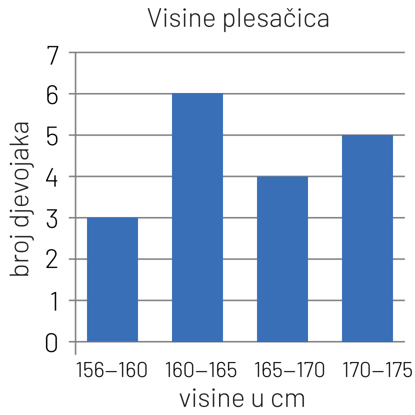
4. Članice plesnoga studija imaju sljedeće visine:

djevojka	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.
visina u cm	157	163	170	165	166	171	167	170	159	172	162	165	171	169	161	162	175	173

Grupirajmo te visine u intervale duljine 5 cm (od 156 cm do 175 cm) i odredimo frekvencije svakoga od tih intervala. Prikažimo to tablicom frekvencija i stupčastim dijagramom.

Rješenje

Visina u cm	Frekvencija	Relativna frekvencija
156 – 160	3	16.6 %
161 – 165	6	33.3 %
166 – 170	4	22.2 %
171 – 175	5	27.8 %

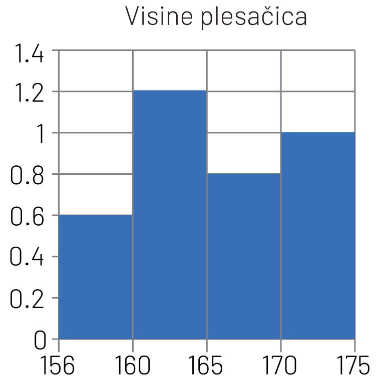


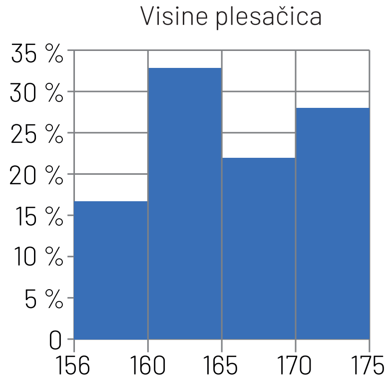
Umjesto stupčastim dijagramom, grupirane podatke češće prikazujemo histogramom. U histogramu se intervali i stupci neprekinuto nadovezuju, a frekvencije intervala predstavljene su površinama stupaca nad tim intervalima. (U slučaju jednakih intervala površine stupaca proporcionalne su njihovim visinama.)

PRIMJER

5. Prikažimo frekvencije i relativne frekvencije iz prethodnoga primjera histogramom.

Rješenje





ZADATAK

5. Anketiraj učenike svojega razreda o njihovim težinama. Grupiraj te težine u intervale po vlastitome odabiru te pronađi njihove frekvencije i relativne frekvencije. Rezultate prikaži tablicom i histogramom. (Možeš odabrati i intervale različitih duljina.)

ZADATCI

6. Nabroji koji su od sljedećih podataka disketni: broj učenika po razredima uključenih u fakultativnu nastavu, temperatura zraka mjerena mjesec dana, broj prodanih automobila u autokući po mjesecima posljednjih godinu dana, duljina kose djevojaka u razredu u cm, broj plaćenih putovanja u Veneciju po godinama posljednjih 15 godina.

7. Učenici su anketirani o učestalosti konzumacije brze hrane. 14 učenika brzu hranu jede svaki dan, 26 nekoliko puta tjedno, 41 nekoliko puta mjesečno, 15 jednom mjesečno, 11 nekoliko puta godišnje i 3 učenika ne jede ju nikad.

a) Prikaži rezultate ankete tablicom frekvencija i relativnih frekvencija.

b) Prikaži podatke kružnim dijagramom.

c) Koliko posto učenika nikad ili samo nekoliko puta godišnje jede brzu hranu?

8. Pronađi na internetu prognozu vremena po satima (00 – 24 h) za mjesto u kojemu živiš. Prikaži je linijskim dijagramom.

a) U koliko sati će temperatura biti najveća?

b) Koja je minimalna prognozirana temperatura?

c) U kojim se satima očekuje najveći porast temperature?

9. Prikaži dijagramom i usporedi uspjeh 1.a i 1.b razreda po zaključenim ocjenama iz Matematike.

1.a : 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5

1.b : 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5

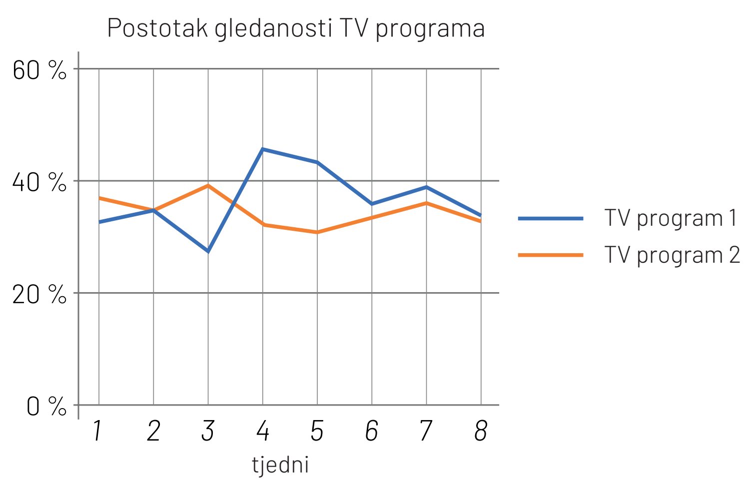
10. Zapiši podatke o datumima rođenja učenika u svojemu razredu, rasporedi ih u 4 skupine po godišnjim dobima i nacrtaj odgovarajući histogram.

11. Dijagramom je prikazana gledanost dviju zabavnih emisija na konkurentskim TV programima koje se prikazuju subotom u 21 h u proteklih osam tjedana. Gledanost je izražena postotkom gledatelja koji u to vrijeme gledaju TV.

a) Koliko je tjedana više gledan TV program 1?

b) Kolika je najveća gledanost nekoga programa i kojega?

c) Koji je tjedan gledanost bila jednaka?



SREDNJE VRIJEDNOSTI I RASPRŠENJA

Sigurno ste često čuli pitanje: „S koliko ćeš proći?" Kako ste svoju ocjenu izračunali i prije razrednika? Zbrojili ste sve zaključene ocjene i podijelili ih s ukupnim brojem predmeta.

Aritmetička sredina jest zbroj svih podataka podijeljen s ukupnim brojem podataka. (Ako su podatci označeni s X_i onda aritmtičku sredinu označavamo s $\overline{X}$.)

PRIMJER **1.**

Profesorica Matematike zaključuje ocjene trima učenicama.

Maja	Lucija	Karla
1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4	1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4	1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4

Ako se koristimo aritmetičkom sredinom, koje će biti njihove završne ocjene?

Maja: $\overline{X} = \dfrac{1+2+3+3+3+3+4+4+4}{9} = 3.00$

Lucija: $\overline{X} = 3.33$

Karla: $\overline{X} = 2.50$

Uočimo da iz aritmetičke sredine proizlazi da sve tri učenice zaslužuju ocjenu dobar.

Mislite li da je aritmetička sredina jedina mjerodavna? Možemo li po nekome drugom kriteriju računati srednju vrijednost podataka?

Osim aritmetičke sredine upotrebljavaju se i druge srednje vrijednosti.

Najpoznatije su **medijan** i **mod**.

Medijan je vrijednost onoga podatka koji podatke poredane po veličini dijeli na dva jednakobrojna dijela. Ako je broj podataka neparan, postoji točno jedan takav središnji podatak, a ako je broj podataka paran, medijan predstavlja aritmetičku sredinu dvaju središnjih podataka. (Označava se s M_e.)

Mod je vrijednost podatka koji se najčešće ponavlja. (Označava se s M_o.)

Ako se dva podatka pojavljuju jednak broj puta, skup podataka je bimodalan.

PRIMJER **2.**

Koje bi ocjene Maji, Luciji i Karli bile zaključene na temelju svih srednjih vrijednosti (aritmetičku sredinu zaokružimo na cijeli broj)?

Rješenje

Maja: $\overline{X} = 3, M_e = 3, M_o = 3$

Lucija: $\overline{X} = 3, M_e = 4, M_o = 4$

Karla: $\overline{X} = 3, M_e = 2, M_o = 1$

Vidimo da se srednje vrijednosti mogu, ali i ne moraju podudarati.

Za koju srednju vrijednost mislite da je najbolja za zaključivanje ocjena?

PRIMJER 3.

Izračunajmo aritmetičku sredinu, medijan i mod za temperature zabilježene u 7 dana prošlogodišnjeg ljetovanja: 22 °C, 23 °C, 24 °C, 24 °C, 25 °C, 23 °C, 21 °C.

Rješenje

Poredajmo podatke po veličini: 21 °C, 22 °C, 23 °C, 23 °C, 24 °C, 24 °C, 25 °C.

$$\overline{X} = \frac{21+22+23+23+24+24+25}{7} = 23.1°C$$

$M_e = 23°C$

Dva se podatka pojavljuju najveći broj puta pa je skup podataka bimodalan.

$M_0 = 23°C$ i $M_0 = 24°C$.

ZADATAK 1.

Učenicima upisanim u sportski klub na sistematskom pregledu izmjerena je visina i dobiveni su sljedeći podatci: 176 cm, 172 cm, 171 cm, 175 cm, 178 cm, 169 cm, 181 cm, 175 cm, 174 cm, 175 cm, 170 cm, 174 cm. Odredite $\overline{X}$, M_e i M_0.

Medijan dijeli skup podatak na pola. Na jednak način podatke možemo podijeliti na četiri jednakobrojna dijela.

Medijan dijeli uređeni niz podataka na dva jednakobrojna niza.
Medijan prve polovine niza jest donji (ili prvi), kvartil koji označavamo s Q_1.
Medijan druge polovine niza jest gornji (ili treći), kvartil koji označavamo s Q_3.

U skladu s tim medijan još zovemo i drugim kvartilom (i katkada ga označavamo s Q_2). Kvartili dijele uređeni niz podataka na četiri jednaka dijela.

PRIMJER 4.

U sljedećem nizu podataka poredanih po veličini odredimo prvi, drugi i treći kvartil:

7, 9, 10, 10, 12, 14, 15, 15, 16, 17, 18.

Rješenje

Prvo odredimo medijan, tj. drugi kvartil $Q_2 = M_e = 14$.

Niz manji od medijana jest: 7, 9, 10,10,12. Prvi ili donji kvartil jest medijan toga niza pa je $Q_1 = 10$.

Niz veći od medijana jest: 15, 15, 16, 17,18. Treći ili gornji kvartil jest medijan tog niza, tj. $Q_3 = 16$.

PRIMJER 5.

Broj ostvarenih bodova na testu iz Matematike za skupinu od 12 učenika jest: 21, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35, 38, 40, 44, 48. Odredimo medijan te donji i gornji kvartil tih podataka.

Rješenje

Broj podataka paran je pa je $M_e = \frac{31+33}{2} = 32$.

Dakle, 50 % učenika ima 32 boda ili manje, a 50 % ima 32 boda ili više.

Donji niz podataka jest: 21, 24, 26, 28, 29, 31 pa je $Q_1 = \frac{26+28}{2} = 27$.

Dakle, 25 % učenika ima 27 bodova ili manje, a 75 % ima 27 bodova ili više.

Gornji niz jest: 33, 35, 38, 40, 44, 48 te vrijedi $Q_3 = \frac{38+40}{2} = 39$.

Dakle, 75 % učenika ima 39 bova ili manje, a 25 % ima 39 bodova ili više..

ZADATAK 2.

Odredi donji i gornji kvartil za podatke iz zadatka 1.

Brkata kutija

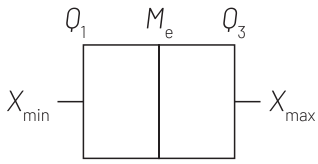
Aritmetička i ostale sredine opisuju skup podataka jednim jedinim brojem. Na primjer, uspjeh nekoga razreda u Matematici možemo opisati prosjekom njihovih zaključenih ocjena iz Matematike. Taj nam podatak daje neku informaciju o uspjehu razreda, no mnoge se informacije tim sažimanjem u jedan broj i gube.

Na primjer, razred od 20 učenika u kojem njih 10 iz Matematike ima 5, a 10 ih ima 1, ima prosjek 3. Isti prosjek ima i razred u kojem svi imaju 3. Prosjek je isti, ali se očito radi o različito raspoređenim ocjenama. U prvome slučaju one su raspršene, a u drugome koncentrirane.

Ako skup podataka želimo sažeto predstaviti bolje nego što to čini aritmetička sredina, možemo se koristiti i „brkatom kutijom", koja daje određenu informaciju i o raspršenju podataka.

Za dijagram koji nazivamo „brkata kutija" potrebno je izdvojiti pet podataka: minimalnu vrijednost svih podataka X_{min}, donji kvartil Q_1, medijan M_e, gornji kvartil Q_3 te maksimalnu vrijednost svih podataka X_{max}. Sam dijagram sastoji se od pravokutnika (kutije) i dvije dužine (brkova).

Pravokutnik obuhvaća 50 % podatka (od prvoga do trećega kvartila). Lijevi brk zauzima 25 % minimalnih, a desni brk 25 % maksimalnih podataka. Krajevi su minimum i maksimum.



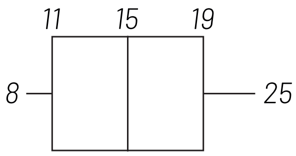
PRIMJER

6. Nacrtajmo „brkatu kutiju" za zadane podatke: 8, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 25.

Rješenje

Potrebni podatci: $X_{min} = 8$, $Q_1 = 11$, $M_e = 15$, $Q_3 = 19$, $X_{max} = 25$

Dakle, brkata kutija izgleda ovako:



ZADATAK

3. Nacrtaj dijagram „brkata kutija" za sljedeće podatke : 120, 121, 125, 134, 139, 145, 152, 158,160, 172.

Dijagram „brkata kutija" posebno je pogodan za uspoređivanje dviju ili više skupine podataka.

PRIMJER

7. Usporedimo uspjeh dvaju paralelnih prvih razreda jedne škole na godišnjemu testu iz Matematike koji je nosio 60 bodova. Postignuti bodovi poredani su po veličini:

1. A: 12, 14, 15, 15, 18, 22, 24, 25, 25, 28, 30, 32, 32, 35, 38, 40, 43, 46, 48, 50, 50, 52, 55, 58

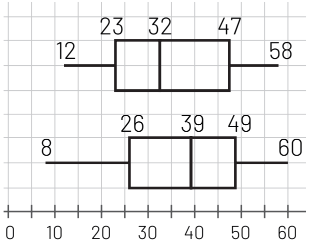
1. B: 8, 15, 18, 20, 24, 24, 28, 30, 30, 32, 35, 38, 40, 40, 44, 45, 45, 48, 50, 51, 52, 52, 56, 60

Rješenje

1. A: $X_{min} = 12,\ Q_1 = 23,\ M_e = 32,\ Q_3 = 47,\ X_{max} = 58$

1. B: $X_{min} = 8,\ Q_1 = 26,\ M_e = 39,\ Q_3 = 49,\ X_{max} = 60$

Nacrtajmo „brkate kutije":



S dijagrama vidimo da je pravokutnik B razreda pomaknut udesno u odnosu na pravokutnik A razreda pa je B razred postigao bolje rezultate na ispitu. Vidimo i da je u tome razredu postignut i najslabiji, ali i najbolji rezultat.

ZADATAK **4.**

Nacrtaj dijagram „brkata kutija" i usporedi uspješnost dviju momčadi po broju postignutih koševa u posljednjih 20 utakmica.

Momčad 1: 70, 72, 73, 75, 76, 78, 81, 82, 83, 86, 88, 91, 91, 92, 93, 95, 95, 96, 98, 100

Momčad 2: 64, 68, 70, 74, 74, 76, 76, 78, 78, 80, 84, 84, 86, 88, 88, 92, 92, 96, 98, 102

PRIMJER **8.**

Dobiveni su mjesečni prosjeci temperatura mora (u °C) u razdoblju od 4 godine za Rab i Hvar:

	sij.	velj.	ožu.	tra.	svi.	lip.	srp.	kol.	ruj.	lis.	stu.	pro.
Rab	10.8	10.6	11.0	12.9	16.7	21.4	23.0	24.0	21.3	17.4	14.5	12.2
Hvar	13.3	12.7	12.7	14.2	16.8	20.4	22.4	23.6	22.5	19.8	17.2	14.8

Koristeći se dijagramom „brkata kutija" usporedi temperature mora za Rab i Hvar.

Rješenje

Poredamo li temperature po veličini, dobit ćemo:

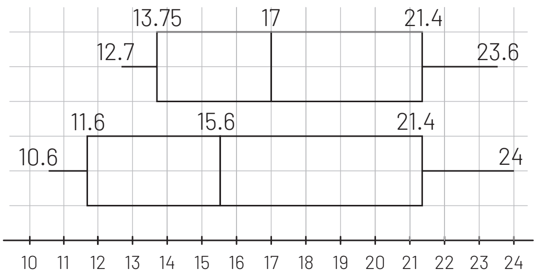
Rab: 10.6, 10.8, 11.0, 12.2, 12.9, 14.5, 16.7, 17.4, 21.3, 21.4, 23.0, 24.0

Hvar: 12.7, 12.7, 13.3, 14.2, 14.8, 16.8, 17.2, 19.8,.20.4, 22.4, 22.5, 23.6

Dakle imamo: Rab: $X_{min} = 10.6,\ Q_1 = 11.6,\ M_e = 15.6,\ Q_3 = 21.4,\ X_{max} = 24.0$

Hvar: $X_{min} = 12.7,\ Q_1 = 13.75,\ M_e = 17.0,\ Q_3 = 21.4,\ X_{max} = 23.6$

Nacrtajmo dijagrame:



Vidimo da je najniža i najviša prosječna površinska temperatura mora izmjerena na Rabu. Pravokutnik za Hvar pomaknut je u odnosu na pravokutnik za Rab malo udesno pa možemo zaključiti da Hvar ima prosječno više temperature mora nego Rab.

Standardna devijacija

Napomena: Standardnu devijaciju možemo lako izračunati kalkulatorom.

Raspršenje podataka oko njihove aritmetičke sredine mjerimo odstupanjima pojedinih podataka od te sredine. Za ukupnu mjeru raspršenja ne možemo uzeti zbroj tih odstupanja jer bi se odstupanja s različitih strana međusobno poništavala (odstupanje ocjene 1 od prosjeka 3 iznosi $1-3=-2$, a ocjene 5 iznosi $5-3=2$ pa je zbroj odstupanja $2-2=0$). Zato kao mjeru uzimamo kvadrate tih odstupanja jer su oni uvijek pozitivni (odstupanje ocjene 1 od prosjeka 3 tada je $(1-3)^2=4$, a ocjene 5 tada je $(5-3)^2=4$ pa je zbroj kvadrata odstupanja $4+4=8$.)

Varijanca je mjera rasipanja podataka oko aritmetičke sredine.

Definira se kao prosječno kvadratno odstupanje od prosjeka.

$$\sigma^2=\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\ldots+(X_n-\overline{X})^2}{n}$$

Standardna devijacija jest drugi korijen iz varijance.

$$\sigma=\sqrt{\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\ldots+(X_n-\overline{X})^2}{n}}$$

Standardnu devijaciju interpretiramo kao prosječno odstupanje svih podataka (moraju biti numerički) od njihove aritmetičke sredine.

Što je standardna devijacija manja to su podatci bliže aritmetičkoj sredini.

PRIMJER 9.

Odredimo standardnu devijaciju za sljedeći niz podataka: 10, 12, 13, 15, 17, 18.

Rješenje

$$\overline{X}=\frac{10+12+13+14+17+18}{6}=14$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{(10-14)^2+(12-14)^2+(13-14)^2+(14-14)^2+(17-14)^2+(18-14)^2}{6}}=$$

$$=\sqrt{\frac{23}{3}}=2.77$$

Dani podatci u prosjeku od aritmetičke sredine (koja iznosi 14) odstupaju za 2.77.

PRIMJER 10.

U jednome četvrtom razredu 8 učenika pisalo je višu razinu mature iz Matematike i postigli su sljedeće bodove: 18, 25, 32, 36, 43, 48, 50, 56. Odredimo standardnu devijaciju za dane podatke.

Rješenje

$$\overline{X}=38.5,\ \sigma=\sqrt{\frac{1200}{8}}=\sqrt{150}=12.25$$

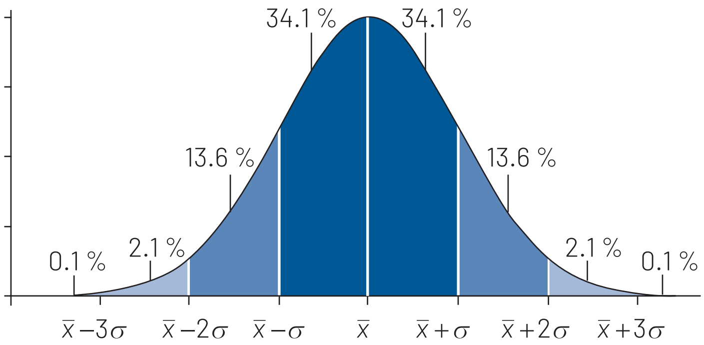
Vidimo da je ovdje standardna devijacija velika jer je velik raspon podataka (velika razlika među učenicima po postignutim bodovima).

ZADATAK 5.

Odredite standardnu devijaciju za sljedeći niz podataka: 3, 5, 6, 8, 9, 9, 12, 13, 14.

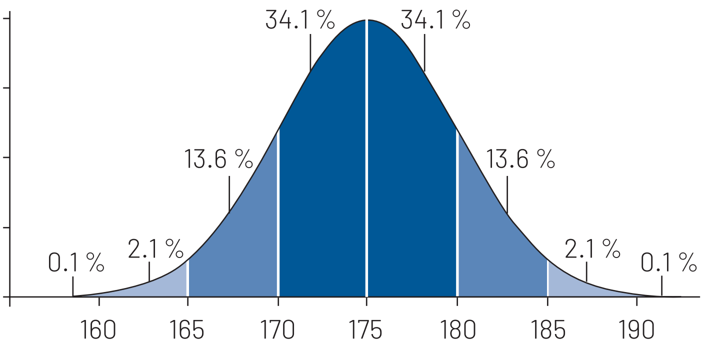
Normalna razdioba

Ako je podatak o populaciji (npr. visina učenika u srednjim školama) rezultat mnogih međusobno nezavisnih utjecaja (npr. prehrane, visine roditelja, razine hormona rasta itd.), onda je histogram relativnih frekvencija toga podatka uvijek potpuno određen njegovom aritmetičkom sredinom $\overline{X}$ i standardnom devijacijom σ. On ima oblik zvonolike krivulje simetrično položene oko $\overline{X}$, a σ joj određuje širinu raspršenja oko $\overline{X}$ na sljedeći način:



Taj se histogram relativnih frekvencija naziva **normalnom razdiobom**.

Na primjer, ako je prosječna visina učenika 175 cm, a njezina standardna devijacija 5 cm, normalna raspodjela visina učenika izgleda ovako:



Dakle, za prosječnu visinu od 175 cm i standardnu devijaciju od 5 cm, lako vidimo da je 34.1 % učenika visoko 170 -175 cm, njih 15.7 % (13.6 + 2.1) visoko je 175 -180 cm itd.

ZADATAK

6. Ako je prosječna visina učenica 165 cm, a njezina je standardna devijacija 5 cm, skiciraj normalnu razdiobu tih visina i odredi koliko je posto učenica visoko:

a) 160 – 170 cm b) 155 – 165 cm c) 170 – 180 cm d) 155 – 175 cm.

7. Kolike su šanse da je učenica koja pripada populaciji iz prethodnoga zadatka

a) viša od 180 cm b) niža od 160 cm?

ZADATCI

8. Sudionici ankete trebali su procijeniti koliko kilograma voća pojedu mjesečno. Dobiveni su sljedeći podatci: 10, 6, 12, 30, 15, 6, 15, 12, 10, 15, 0, 15, 12, 10, 18, 15, 10, 6, 10, 15. Odredi aritmetičku sredinu, medijan, mod te donji i gornji kvartil zadanih podataka.

9. Na satu Tjelesne i zdravstvene kulture učenicama je mjereno koliko trbušnjaka mogu napraviti u minuti te su dobiveni podatci: 32, 37, 35, 28, 34, 29, 32, 40, 49, 30. Odredi aritmetičku sredinu, medijan, mod te donji i gornji kvartil zadanih podataka. Protumači dobivene vrijednosti.

10. Lorna kupuje haljinu za maturalnu zabavu. Obišla je trgovački centar i pet haljina ušlo je u uži izbor. Cijene haljina iznose: 499 kn, 549 kn, 549 kn, 579 kn, 599 kn, 1299 kn. Izračunaj prosječnu cijenu haljine koja se sviđa Lorni. Koja srednja vrijednost bolje prikazuje prosječnu cijenu: aritmetička sredina ili medijan? Obrazloži odgovor.

11. Astrid se bavi streljaštvom i na posljednjih deset treninga od mogućih 400 bodova postigla je sljedeće rezultate: 353, 354, 355, 354, 354, 355, 335, 354, 353, 354. Radi prolaska na daljnja natjecanja potrebno je izračunati srednju vrijednost bodova. Koja srednja vrijednost bolje prikazuje rezultat: aritmetička sredina, medijan ili mod? Obrazloži odgovor.

12. Zapiši podatke o visini učenika u svojem razredu i odredi i protumači aritmetičku sredinu, medijan, mod te donji i gornji kvartil tih podataka.

13. Nacrtaj dijagram „brkata kutija" za sljedeće podatke: 22, 27, 28, 30, 33, 34, 39, 41, 42.

14. Dijagramom „brkata kutija" usporedi uspješnost Tene i Ive na posljednjih 12 treninga streljaštva na kojima se pripremaju za natjecanje. Tena: 346, 348, 349, 349, 350, 351, 352, 352, 354, 356, 356, 358; Iva: 344, 345, 347, 348, 350, 352, 354, 354, 355, 356, 358, 360.

15. Odredi standardnu devijaciju za podatke o broju tenisica djevojaka u jednome razredu: 36, 37, 37, 38, 38, 39, 39, 39, 40, 41 i protumači ju.

16. Oton je golman u nogometnome klubu „Zlatna kopačka". Odlučio je voditi evidenciju o broju obranjenih golova na proteklih 9 utakmica. Dobio je podatke: 5, 3, 1, 4, 2, 2, 5, 7, 7. Odredi standardnu devijaciju i protumači ju.

17. Saznaj od barem šest učenika/učenica svojega razreda koliko vremena u prosjeku dnevno provedu na mobitelu. Izračunaj aritmetičku sredinu te standardnu devijaciju i protumači ih.

JESMO LI RAZUMJELI?

1. Ako želimo najlakše očitati postotak pojedine ocjene na testu iz Matematike podatke ćemo prikazati:

A. linijskim dijagramom B. stupčastim dijagramom
C. histogramom D. kružnim dijagramom.

2. Toni posljednjih sedam dana mjeri broj otkucaja srca nakon vježbanja. Podatke je poredao po veličini: 98, 101, 101, 102, 103, 106, 110. Koji je medijan zapisanih podataka?

A. 101 B. 102 C. 103 D. 106

3. Maša se 10 dana priprema za ispit iz Matematike i svaki dan rješava zadatke. Po danima je riješila sljedeći broj zadataka: 8, 7, 10, 10, 9, 10, 6, 10, 12, 12. Ako kažemo da ima najviše dana u kojima je riješila 10 zadataka odredili smo:

A. mod B. medijan
C. aritmetičku sredinu D. gornji kvartil.

4. Ksenijine ocjene iz matematike su: 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5 . Najpovoljniji način zaključivanja ocjena za Kseniju bio bi:

A. mod B. medijan
C. aritmetička sredina D. uvijek je ista ocjena

5. Učenici jednoga razreda anketirani su o broju djece u njihovoj obitelji. Ovo su njihovi odgovori: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 7. Koju srednju vrijednost ne biste upotrijebili kao odgovor koji prikazuje prosječan broj djece u obitelji?

A. mod B. medijan
C. aritmetička sredina D. srednje vrijednosti su jednake.

6. Za crtanje „brkate kutije" potrebni su sljedeći podatci:

A. minimum, maksimum, mod, medijan i aritmetička sredina
B. minimum, maksimum, mod, donji i gornji kvartil
C. minimum, maksimum, medijan, donji i gornji kvartil
D. minimum, maksimum, aritmetička sredina, donji i gornji kvartil.

7. Ako je prosječan broj bodova koje su postigli učenici na ispitivanju iznosi 142 boda, a standardna devijacija 7, koliko posto učenika ima 135 – 149 bodova?

A. 34.1 % B. 47.7 % C. 68.2 % D. 95.4 %

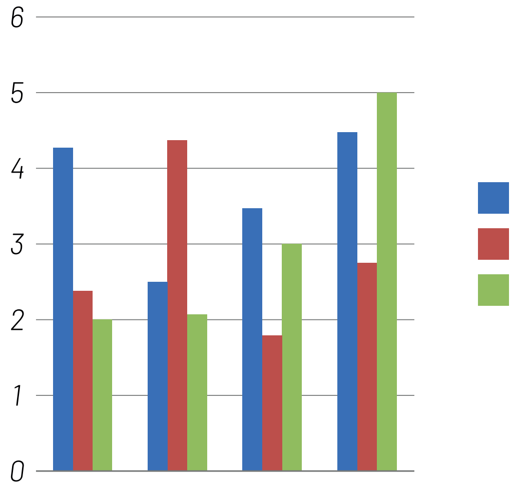
ZADATCI ZA PONAVLJANJE

1. Izradi ankentni upitnik o najdražemu predmetu učenika u tvojemu razredu te za dobivene podatke nacrtaj stupčasti i linijski dijagram.

2. Istraži koliko se sati tjedno učenici tvojega razreda bave nekom fizičkom aktivnošću te nacrtaj histogram tako da dobivene podatke rasporediš u pet razreda.

3. Pronađi na internetu (na stranicama Državnoga zavoda za statistiku) podatke o broju učenika koji su u posljednjih šest godina završili srednju školu u Republici Hrvatskoj. Raspodijeli podatke po spolu i prikaži ih dvostrukim linijskim dijagramom.

4. Osmisli zadatak kojem odgovara sljedeći dijagram:



5. Nacrtaj „brkate kutije” uz pomoć kojih ćeš usporediti uspješnost dvaju razreda po broju postignutih bodova na ispitu iz Matematike:

   1.a: 3, 4, 6, 6, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 14, 14, 15, 16, 16, 16, 17, 17, 18, 19, 19, 20

   1.b: 1, 3, 3, 5, 6, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 14, 14, 15, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 20.

6. U tablici su prikazani podatci o upisima u srednje škole 2016./2017. u Republici Hrvatskoj (Državni zavod za statistiku). Podatke prikaži dvostrukim stupčastim dijagramom iz kojega možeš iščitati postotak učenika po pojedinim školama.

Škola	UKUPNO	DJEVOJKE	MLADIĆI
ukupno	42 711	21 397	21 314
gimnazije	12 855	7919	4936
tehničke i srodne	18 819	9293	9526
umjetničke	1035	729	306
industrijske i obrtničke	9554	3276	6278
škole za učenike s teškoćama	448	180	268

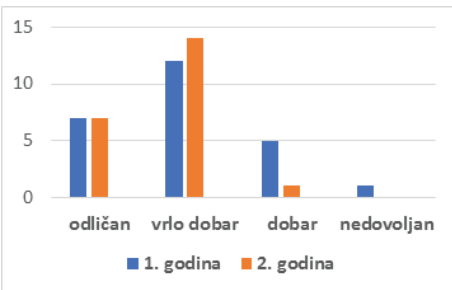
RJEŠENJA

9. PODATCI

PRIKAZ PODATAKA

1. Anketirano je 240 osoba, ljubitelja pasa ili mačaka ima 60 %.

3.

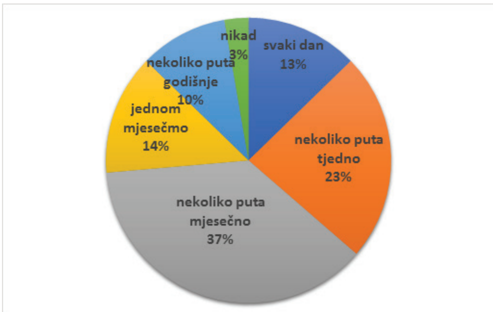


6. Diskretni: broj učenika, broj prodanih automobila, broj plaćenih putovanja

7. a)

Učestalost konzumiranja brze hrane	Broj učenika
svaki dan	14
nekoliko puta tjedno	26
nekoliko puta mjesečno	41
jednom mjesečno	15
nekoliko puta godišnje	11
nikad	3

b)



c) 13 %

11. a) 5 **b)** plavi, 45 % **c)** drugi

SREDNJE VRIJEDNOSTI I RASPRŠENJA

1. $\overline{X} = 174.2,\ M_e = 174.5,\ M_o = 175$

2. $Q_1 = 171.5,\ Q_3 = 175.5$

5. $\sigma = 3.52$

6. a) 68.2 % **b)** 47.7 % **c)** 15.7 % **d)** 95.4 %

7. a) 0.1 % **b)** 15.8 %

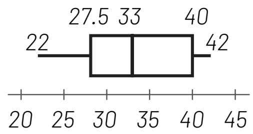
8. $\overline{X} = 12.1,\ M_e = 12,\ M_o = 15,\ Q_1 = 10,\ Q_3 = 15$

9. $\overline{X} = 35,\ M_e = 33,\ M_o = 32,\ Q_1 = 30,\ Q_3 = 37$

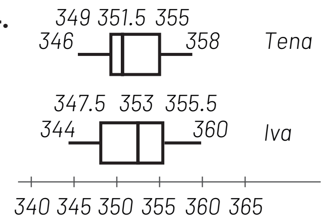
10. medijan

11. mod

13.



14.



15. $\sigma = 1.43$

16. Broj obranjenih golova, od aritmetičke sredine koja iznosi 4, u prosijeku odstupa za 2.05

JESMO LI RAZUMJELI

1. D

2. B

3. A

4. A

5. C

6. C

7. C

TEORIJSKA VJEROJATNOST (*A PRIORI*)

Na TV kvizu natjecatelji odabiru pitanja tako da iz kutije izvlače jednu od kuglica. U svakoj je kuglici jedno pitanje. „Plava" su pitanja o sportu, „zelena" o povijesti, a „crvena" o umjetnosti. Točan odgovor na pitanje označeno brojem *n* donosi *n* bodova. Sve su kuglice jednake veličine i težine. Natjecatelj ih izvlači iz kutije bez gledanja, pa sve kuglice imaju **jednaku vjerojatnost** da budu izvučene.

PI je plava kuglica na kojoj piše I i nosi jedan bod; ZII zelena kuglica na kojoj piše II; CIII crvena na kojoj piše III itd.

PRIMJER

1. Kolika je vjerojatnost da natjecatelj izvuče:

a) crvenu kuglicu (*C*)

b) kuglicu s brojem I (I)

c) zelenu kuglicu s brojem II (*Z* i II)

d) zelenu kuglicu ili kuglicu s brojem II (*Z* ili II)?

Rješenje

a) U šeširu je ukupno 9 kuglica, a crvenih 2. Dakle, crvene kuglice čine $\frac{2}{9}$ svih kuglica, pa je prirodno reći da je tražena vjerojatnost $\frac{2}{9}$. Događaj da je izvučena crvena kuglica označili smo s C pa dobiveni rezultat matematički zapisujemo ovako:

$\mathrm{P}\,(C) = \frac{2}{9}$ (vjerojatnost se latinski piše ***p****robabilitas*).

To je kraći zapis za: „Vjerojatnost da se dogodio događaj *C* jest $\frac{2}{9}$".

b) Kuglice s brojem I čine $\frac{3}{9}$ svih kuglica. Tražena je vjerojatnost $\frac{3}{9}$, tj. $\frac{1}{3}$.

Dakle, $\mathrm{P}\,(\mathrm{I}) = \frac{1}{3}$.

c) Samo je jedna kuglica zelena i ima broj II. Dakle, $\mathrm{P}\,(Z \text{ i II}) = \frac{1}{9}$.

d) Ukupno je 5 kuglica koje su zelene ili imaju broj II. Dakle, $\mathrm{P}\,(\mathrm{Z} \text{ ili II}) = \frac{5}{9}$.

ZADATAK

1. Kolika je vjerojatnost da natjecatelj izvuče:

a) zelenu kuglicu (*Z*)

b) plavu kuglicu (*P*)

c) kuglicu s brojem II (II)

d) kuglicu s brojem III (III)?

2. Kolika je vjerojatnost da natjecatelj iz šešira izvuče kuglicu koja je:

a) plava ili s brojem III (*P* ili III)

b) crvena i s brojem III (*C* i III)

c) plava i s brojem III (*P* i III)

d) crvena ili s brojem III (*C* ili III)?

Izvlačenje kuglice iz šešira zove se **slučajni pokus** (zato što je rezultat pokusa slučajan, a ne zato što je sam pokus slučajan). Svaki mogući rezultat toga slučajnog pokusa zove se njegovim **ishodom** ili **elementarnim događajem**. Skup svih elementarnih događaja slučajnoga pokusa zove se **prostor elementarnih događaja** i označava se s Ω. Dakle, naš slučajni pokus ima 9 elementarnih događaja i

$\Omega = \{PI_1, PI_2, PI_3, PII, ZII, ZIII_1, ZIII_2, CIII_1, CIII_2\}$.

Skup elementarnih događaja (dakle podskup od Ω) predstavlja slučajni događaj. Na primjer, događaji „izvučena je plava kuglica" i „izvučena je kuglica s brojem II" predstavljeni su skupovima

$P = \{PI_1, PI_2, PI_3, PII\} \quad II = \{PII, ZII\}$.

Vjerojatnost = povoljni/mogući

Ako slučajni pokus ima konačno mnogo elementarnih događaja i ako su svi oni jednako vjerojatni, onda vjerojatnost slučajnih događaja možemo odrediti *a priori* (bez iskustva):

Vjerojatnost *apriori* (teorijska)

Vjerojatnost događaja *A* jednaka je omjeru broja povoljnih ishoda za *A* i broja svih mogućih ishoda

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}$$

(gdje je *k* (A) broj elemenata u skupu *A*, tzv. kardinalni broj skupa *A*).

PRIMJER 2.

Kolika je vjerojatnost da natjecatelj iz šešira izvuče kuglicu koja je:

a) *P* i *C*

b) I ili II ili III?

Rješenje

a) Kuglica ne može biti i *P* (plava) i *C* (crvena). Dakle, broj povoljnih ishoda za taj **nemogući** događaj jest 0, pa imamo $P\,(P \text{ i } C) = \frac{0}{9} = 0$.

b) Svaka kuglica sigurno je označena ili s I ili s II ili s III. Dakle, broj povoljnih ishoda za taj **sigurni** događaj jest 9 pa imamo $P\,(\text{I ili II ili III}) = \frac{9}{9} = 1$.

Nemogući događaj ima vjerojatnost 0 (događaj koji se nikada neće ostvariti).
Sigurni događaj ima vjerojatnost 1 (događaj koji će se sigurno dogoditi).

ZADATAK 3.

Kolika je vjerojatnost da natjecatelj iz kutije izvuče kuglicu koja je:

a) I i II

b) P ili Z ili C?

Francuski kockar Chevalier de Mere znao je da se u 4 bacanja kocke šestica pojavljuje s vjerojatnošću većom od 50 % pa je zaključio da se 2 šestice u 24 bacanja također pojavljuju s vjerojatnošću većom od 50 %. No kockarska ga je praksa demantirala. Upitao je matematičara i filozofa Blaisea Pascala u čemu je problem i tako je počelo stvaranje matematičke teorije vjerojatnosti.

PRIMJER 3.

Koji su elementarni ishodi kod bacanja kocke kojom igramo „čovječe ne ljuti se“? Kolika je vjerojatnost svakoga od elementarnih ishoda?

Kolika je vjerojatnost da bacanjem kocke dobijemo parni broj?

Rješenje

Elementarni su ishodi 1, 2, 3, 4, 5 i 6, tj. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Kocka je simetrična, pa nema razloga da ijedan ishod bude vjerojatniji od drugoga. Zato svi elementarni ishodi imaju istu vjerojatnost $\frac{1}{6}$. Povoljnih ishoda za parni broj ima 3 (to su 2, 4 i 6), dok je svih mogućih ishoda 6. Znači, vjerojatnost da dobijemo paran broj iznosi $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, tj. $P(\text{paran}) = \frac{1}{2}$.

ZADATAK 4.

Kolika je vjerojatnost da bacanjem kocke dobijemo:

a) neparan broj
b) prost broj
c) broj manji od 3
d) broj 8
e) neki broj?

PRIMJER 4.

Koji su elementarni ishodi kod bacanja dviju kocki? Kolika je vjerojatnost svakoga od elementarnih ishoda? Kolika je vjerojatnost da zbroj na obje kocke bude 9?

Rješenje

Mogući ishodi bacanja dviju kocki jesu svi mogući uređeni parovi brojeva od 1 do 6. Svakomu takvom paru odgovara jedan kvadratić u donjoj tablici, koja predstavlja prostor elementarnih događaja Ω (npr. elementarni događaj „na prvoj kocki jest 3, a na drugoj 4“ predstavljen je parom (3, 4)).

Elementarnih je događaja 36. Jednako su vjerojatni pa im je vjerojatnost $\frac{1}{36}$.

Elementarni događaji povoljni za zbroj 9 nalaze se na „žutoj dijagonali“ i ima ih 4. Dakle, vjerojatnost zbroja 9 jest $\frac{4}{36}$, tj. $P(\text{zbroj } 9) = \frac{1}{9}$.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ZADATAK 5.

Koji je zbroj pri bacanju dviju kocki najvjerojatniji, a koji je najmanje vjerojatan? Kolike su te vjerojatnosti?

Empirijska vjerojatnost (a posteriori)

Kada bacimo novčić, očekujemo da su glava i pismo jednako vjerojatni. Novčić je simetričan i nema razloga da jedan od ta dva moguća ishoda bude vjerojatniji od drugoga. Isto vrijedi za kocku i njezinih šest jednako vjerojatnih ishoda. No nije uvijek tako. Na primjer, bacimo li čavlić, on može pasti tako da mu vrh gleda gore ili ukoso dolje.

Ta dva ishoda nisu simetrična, pa ne možemo očekivati da su jednako vjerojatni. Da bismo otkrili kolika je vjerojatnost ishoda *G* (vrh gleda gore) i *D* (vrh gleda dolje), moramo čavliće bacati više puta i empirijski ustanoviti kolika je relativna frekvencija ishoda *G*, a kolika ishoda *D*.

$P(G) \approx$ relativna frekvencija događaja *G*

$P(D) \approx$ relativna frekvencija događaja *D*

PRIMJER

5. Profesorica u ruci ima 10 čavlića i baca ih tako da svi učenici mogu vidjeti ishode bacanja. Poslije svakoga bacanja učenici zapisuju koliko vrhova gleda gore (*G*), a koliko dolje (*D*). Profesorica ponavlja bacanje 10 puta. Učenici su zapisali rezultate svih 10 bacanja:

bacanje	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrh gore (*G*)	4	3	5	6	5	5	2	3	4	4
vrh dolje (*D*)	6	7	5	4	5	5	8	7	6	6

Odredimo približne vjerojatnosti ishoda *G* i *D*.

Rješenje

Dobiveni su rezultati prikazani u tablici.

Zaključujemo iskustveno (empirijski) da je $P(G) \approx 0.41$ i $P(D) \approx 0.59$.

	frekvencija	relativna frekvencija
G	41	41/100
D	59	59/100

ZADATAK

6. Ponovi pokus iz 5. primjera u svojemu razredu i izračunaj odgovarajuće relativne frekvencije tj. približne vjerojatnosti.

Vjerojatnost *a posteriori* (empirijska)

Vjerojatnost događaja A približno je jednaka relativnoj frekvenciji pojavljivanja toga događaja pri ponavljanju slučajnoga pokusa velik broj puta:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n},$$

gdje je n broj pokusa, a $n(A)$ broj pokusa povoljnih za A.

PRIMJER **6.** Košarkaš Tomo u posljednjih je 300 pokušaja koš pogodio 186 puta. Kolika je (empirijska) vjerojatnost da će i u sljedećemu pokušaju pogoditi koš?

Rješenje

Relativna frekvencija Tominih pokušaja jest $\frac{186}{300}=0.62$.

To je ujedno (empirijska) vjerojatnost da će on i sljedeći put pogoditi koš.

Ako Tomin pogodak označimo s T, onda to možemo zapisati: $P(T)=0.62$.

ZADATAK

7. Hrvoje je promašio koš u 120 od 300 ponovljenih pokušaja. Kolika je vjerojatnost da će u sljedećemu pokušaju: a) promašiti b) pogoditi?

8. U posljednjih 1000 porođaja u Hrvatskoj je rođeno 515 dječaka i 485 djevojčica. Kolika je vjerojatnost da se pri nekomu porodu u Hrvatskoj rodi dječak, a kolika da se rodi djevojčica?

9. Frane, Ana i Lovro odigrali su 40 igara. Frane ih je dobio 12, Ana 20, a Lovro 8. Kolika je vjerojatnost za svakoga od njih da dobije sljedeću igru?

Provjeri u svojemu razredu ima li barem dvoje učenika isti rođendan. To možeš učiniti tako da učenici redom izgovaraju datum svojega rođendana, sve dok netko od preostalih učenika izgovoreni datum ne prepozna kao datum svojega rođendana. Ako se to dogodi, onda to dvoje učenika ima isti rođendan, a ako se ne dogodi, onda u tvojem razredu svi imaju različite rođendane. Što misliš, što će se dogoditi?
Što misliš, kolika je vjerojatnost da u skupini od 30 ljudi barem dvoje ima isti rođendan? Ta je vjerojatnost 70 % (tj. 0.7). Možda zvuči nevjerojatno, ali nakon sljedećega poglavlja to ćeš moći izračunati i sam/a.

ZADATCI

10. Prikaži prostor elementarnih događaja za sljedeće pokuse:

a) bacanje triju novčića

b) bacanje 1 kocke i 1 novčića

c) gađanje (pogodak = 1 ili promašaj = 0) u metu za tri strijelca.

11. Kolika je vjerojatnost da se pri bacanju dvije kocke dobije:

a) dvije šestice
b) točno jedna šestica
c) nijedna šestica
d) broj 2 i broj 3
e) zbroj jednak 8
f) zbroj veći od 8?

12. Kolika je vjerojatnost da se pri istovremenom bacanju novčića i kocke dobije:

a) glava i broj 6
b) glava i broj manji od 6
c) glava i paran broj
d) ni glava ni broj 4
e) glava ili paran broj
f) pismo ili neparan broj?

13. Iva u ormaru ima 3 plave, 2 bijele i 4 prugaste košulje. Odredi vjerojatnost da je Iva slučajnim odabirom obukla plavu košulju.

14. Kolika je vjerojatnost da ćeš:

a) pri bacanju triju novčića dobiti samo jedno pismo

b) pri bacanju dviju kocki dobiti barem jednu šesticu?

c) za otključavanje brave, u snopu od 7 ključeva odabrati onaj pravi?

15. Sljedeća tablica pokazuje broj muških i ženskih osoba u školi prema odabiru drugoga stranog jezika.

	talijanski	njemački	francuski
M	25	48	24
Ž	31	52	20

Odredite vjerojatnost da slučajno odabrana osoba:

a) uči njemački

b) uči francuski i ženskoga je spola

c) muškoga je spola

d) ženskoga je spola i uči talijanski ili njemački.

16. Lutrija ima 500 srećki numeriranih od 1 do 500. Ako slučajno izvlačimo jednu srećku, kolika je vjerojatnost da ćemo izvući:

a) neparan broj

b) višekratnik broja 6

c) dvoznamenkasti broj s različitim znamenkama?

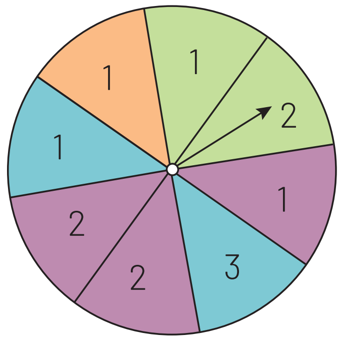
ZADATCI

17. U špilu od 52 karte četiri su „boje" – pik, tref, herc i karo. U svakoj je boji 13 karata poredanih po jakosti: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (dečko), D (dama), K (kralj) i A (as). Pik i tref crne su boje, a herc i karo crvene. Ako iz špila na slučajan način izvlačimo jednu kartu, kolika je vjerojatnost da je izvučena karta:

a) kralj
b) pik
c) crvena dama
d) pikov kralj
e) nije as
f) nije ni tref ni kralj?

18. Na slici je zvrk, kružna ploča podijeljena na 8 jednakih područja obojenih i označenih brojevima. Nakon vrtnje strelica se s jednakom vjerojatnošću zaustavlja na jednome od 8 područja. Odredi vjerojatnost da se strelica zaustavi na:

a) plavome području
b) području s brojem 2
c) ružičastome području i broju 2
d) području s brojem većim od 3
e) području koje nije narančasto
f) zelenome ili plavome području
g) području koje nije zeleno i ima broj 2
h) području s prostim brojem.

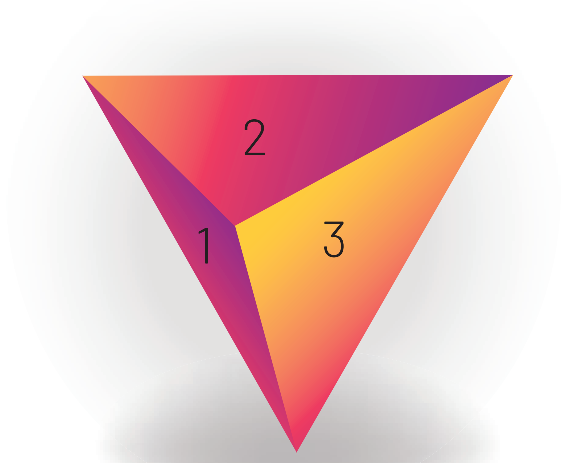


19. Kriška kruha s pekmezom bacana je 30 puta, od čega je 20 puta pala na stranu na kojoj je pekmez. Kolika je vjerojatnost da će i pri sljedećem bacanju kriška pasti na stranu s pekmezom?

20. Igraća „kockica", oblika tetraedra, bacana je 800 puta i dobiveni su sljedeći rezultati:

ishod	1	2	3	4
frekvencija	208	192	200	200

a) Odredi relativne frekvencije svakoga ishoda.
b) Možemo li reći da je „kockica" fer?

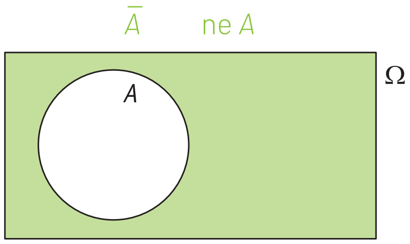


PRAVILA ZA RAČUNANJE VJEROJATNOSTI

Dosadašnje računanje vjerojatnosti svodilo se na prebrojavanje. Želimo li pak pomoću poznatih vjerojatnosti „starih“ događaja računati vjerojatnosti „novih“ događaja, potrebna su nam pravila za njihovo računanje. Kako je svaki slučajan događaj podskup prostora elementarnih događaja Ω, „novi“ slučajni događaji određeni su skupovnim operacijama nad „starima“.

Suprotan događaj događaju *A* ostvaruje se ako se ne ostvari događaj *A*.

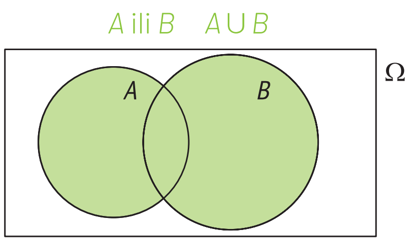
Na primjer, za A : „na kocki je paran broj“, imamo $\overline{A}$: „na kocki je neparan broj“.



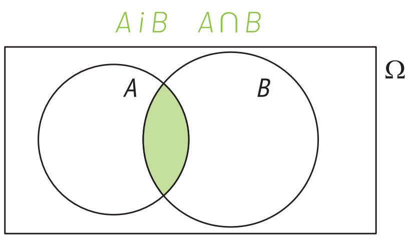
$\{2\} \cup \{3, 5, 7\} = \{2, 3, 5, 7\}$

Unija događaja *A* i *B* ostvaruje se ako se ostvari barem jedan od događaja *A* ili *B*.

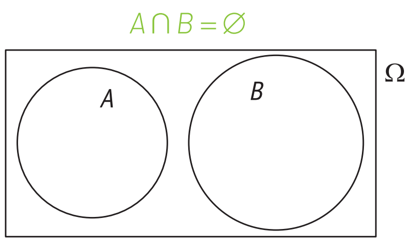
Na primjer, za A: „na kocki je 2“ i B: „na kocki je neparan broj veći od 1“, imamo $A \cup B$: „na kocki je prost broj“.



Presjek događaja *A* i *B* ostvaruje se ako se istodobno ostvare i događaj *A* i događaj *B*. Na primjer, za A : „na kocki je paran broj“ i B : „na kocki je prost broj“, imamo $A \cap B$: „na kocki je broj 2“.



Kažemo da se događaji *A* i *B* **međusobno isključuju** ako je $A \cap B = \varnothing$ (tj. $A \cap B$ nemoguć je događaj). To znači da se događaji *A* i *B* ne mogu ostvariti istodobno. Na primjer, događaji A : „na kocki je neparan broj“ i B : „na kocki je paran broj“ međusobno se isključuju.



Kako za teorijsku (*a priori*) vjerojatnost, tako i za empirijsku (*a posteriori*) vjerojatnost vrijede sljedeća pravila:

Pravila za računanje vjerojatnosti

1) $0 \le P(A) \le 1$ 2) $P(\Omega) = 1$ 3) $P(\varnothing) = 0$

4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

5) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

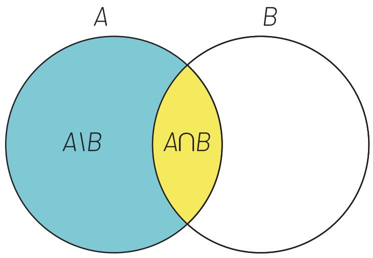
6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (ako se događaji A i B međusobno isključuju)

7) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (bez ograničenja).

Dokazat ćemo ih za empirijsku vjerojatnost $P(A) = \frac{n(A)}{n}$, gdje je n broj pokusa, a $n(A)$ broj pokusa povoljnih za A.

1) $0 \le \frac{n(A)}{n} \le 1$

jer je broj pokusa s ishodom A, $n(A)$, manji ili jednak broju svih pokusa n.



2) $\frac{n}{n} = 1$

3) $\frac{0}{n} = 0$

4) $\frac{n(A)}{n} + \frac{n(\bar{A})}{n} = \frac{n}{n} = 1$

jer pokusi s ishodom A i pokusi s ishodom $\bar{A}$ čine svih n pokusa.

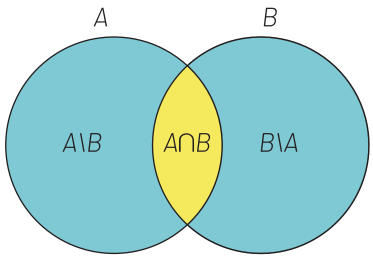
6) $\frac{n(A \cup B)}{n} = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n}$

jer je broj pokusa s ishodom $A \cup B$ jednak zbroju broja s ishodom A i onih s ishodom B ako se A i B isključuju.

5) slijedi iz 6) jer se $A \cap B$ i $A \setminus B$ isključuju i $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

7) Možemo izvesti iz ostalih pravila:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\ &= (P(A) - P(A \cap B)) + P(A \cap B) + \\ &\quad (P(B) - P(A \cap B)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$



ZADATAK 1.

Pokušaj dokazati da pravila 1. – 7. vrijede i za teorijsku vjerojatnost $P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}$.

PRIMJER **1.**

Vjerojatnost da izvučete pobjedničku srećku jest 0.01. Kolika je vjerojatnost da ne izvučete pobjedničku srećku?

Rješenje

Događaj $\overline{A}$: „nije izvučena pobjednička srećka" suprotan je događaju A : „izvučena je pobjednička srećka". Zato vrijedi:

$P(\overline{A})=1-P\ (A)=1-0.01=0.99.$

Šanse za gubitak jesu 99 %.

2.

Kolika je vjerojatnost da u 4 bacanja kocke bar jednom dobijemo 6?

Rješenje

Prostor elementarnih događaja sastoji se od uređenih četvorki brojeva od 1 do 6 (npr. (2, 4, 1, 6) ili (6, 6, 5, 1) itd.). Postoji ukupno $6\cdot6\cdot6\cdot6=1296$ takvih elementarnih ishoda. (Možeš li obrazložiti zašto?)

Nas zanima skup onih uređenih četvorki u kojima se bar jednom pojavljuje 6. Označimo ga s A. Budući da je teško prebrojiti koliko on ima elemenata, promotrimo suprotni skup $\overline{A}$ koji sadržava uređene četvorke bez i jedne šestice. Taj skup ima $5\cdot5\cdot5\cdot5=625$ elemenata. Dakle,

$P(\overline{A})=\dfrac{625}{1296}\approx0.48.$

Sada lako odredimo vjerojatnost da je pala barem jedna šestica:

$P(A)=1-P\ (\overline{A})\approx0.52.$

ZADATAK **2.**

U špilu se nalazi 5 karata numeriranih od 1 do 5. Slučajno izvlačiš jednu kartu i potom je vraćaš u špil. Kolika je vjerojatnost da u 3 izvlačenja barem jednom izvučeš kartu s brojem 1?

PRIMJER **3.**

Slučajno biramo prirodan broj manji ili jednak od 100. Kolika je vjerojatnost da je izabrani broj djeljiv s 3 ili sa 7?

Rješenje

$k(\Omega)=100$. Brojeva do 100 koji su djeljivi s 3 ima $k(A)=33$. Brojeva do 100 koji su djeljivi sa 7 ima $k(B)=14$. Brojeva do 100 koji su djeljivi i s 3 i sa 7 (znači, s 21) ima $k(A\cap B)=4$. Nas zanima vjerojatnost događaja $A\cup B$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{33}{100}+\dfrac{14}{100}-\dfrac{4}{100}=0.43$

ZADATAK **3.**

Iz dobro promiješanoga špila od 52 karte izvlačimo jednu kartu. Kolika je vjerojatnost da je ta karta herc ili as?

ZADATCI

4. Pokus se sastoji u izvlačenju jedne karte iz špila od 52 karte. Odredi suprotan događaj za događaj A i odredi njegovu vjerojatnost ako je A:

a) „izvučena je crvena karta"
b) „izvučen je pik"
c) „izvučen je as ili kralj"
d) „izvučena je karta herc ili karo".

5. Pokus se sastoji u bacanju jedne simetrične kocke. Koji se od sljedećih događaja međusobno isključuju?

A: „pao je broj djeljiv s 3", B: „pao je broj manji od 3", C: „pao je broj veći od 3",
D: „pao je broj veći od 2", E: „pao je broj koji je potpuni kvadrat"

6. Za događaje A i B vrijedi da je $P(A) = 0.3$, a $P(B) = 0.4$. Odredite

a) $P(A \cup B)$ ako se događaji A i B međusobno isključuju
b) $P(A \cup B)$ i $P(A \setminus B)$ ako je $P(A \cap B) = 0.15$
c) $P(\overline{A})$.

7. Za događaje A i B vrijedi da je $P(A) = 0.6$, $P(A \cup B) = 0.9$, $P(\overline{B}) = 0.3$. Odredite

a) $P(B)$
b) $P(\overline{A \cup B})$
c) $P(A \cap B)$
d) $P(A \setminus B)$.

8. U vrećici je 50 kuglica s brojevima od 1 do 50. Slučajno odabiremo jedan broj. Neka su A i B sljedeći događaji: A : „izvučeni je broj djeljiv s 3", B : „izvučen je paran broj veći od 31". Odredite sljedeće vjerojatnosti:

a) $P(A)$
b) $P(B)$
c) $P(A \cap B)$
d) $P(\overline{A})$
e) $P(A \cup B)$
f) $P(A \setminus B)$
g) $P(\overline{A \cap B})$
h) $P(\overline{A \cup B})$.

9. Iz špila od 52 karte izvlačimo jednu kartu. Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta:

a) pik ili kralj?
b) crvena i kralj
c) nije herc?

10. Među 100 anketiranih osoba njih 68 je odgovorilo da barem jednom mjesečno ide u kino, 45 ih ide u kazalište, a njih 12 ne ide ni u kino ni u kazalište. Odredite vjerojatnost da slučajno odabrana osoba među njima:

a) ide i u kino i u kazalište
b) ne ide u kazalište
c) ne ide u kino, već samo u kazalište.

11. U jednoj je školi provedena anketa o alergiji na pelud trava i pelud drveća. Od 500 ispitanika njih 96 ima alergiju na pelud trava, 145 ima alergiju na pelud drveća, a njih 52 ima alergiju i na pelud trava i na pelud drveća. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana osoba u školi:

a) ima alergiju barem na jednu pelud
b) nema alergiju ni na pelud trava ni na pelud drveća
c) ima alergiju samo na pelud drveća?

ZADATCI

12. Iz skupa svih prirodnih brojeva manjih od 200 biramo jedan broj. Odredi vjerojatnost da bude djeljiv s 5 ili sa 6.

13. Iz skupa svih dvoznamenkastih brojeva biramo jedan broj. Odredi vjerojatnost:

a) da odabrani broj ima znamenku 0 ili da bude djeljiv s 3
b) da je odabrani djeljiv barem s jednim od brojeva 4 ili 5
c) da odabrani broj ima barem jednu znamenku 3
d) da je odabrani broj djeljiv s 5, ali nije djeljiv s 3.

14. Kolika je vjerojatnost slučajno odabrana karta, iz špila od 52 karte, bude:

a) dama ili tref
b) crvena ili as
c) ni as ni kralj?

15. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana peteroznamenkasta lozinka ima barem jednu nulu?

16. Kolika je vjerojatnost da nasumce složena riječ od tri slova ima barem jedno slovo *M* ako slova biramo iz naše abecede (od 30 slova)?

GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST

U geometrijskim slučajnim pokusima ishoda ima beskonačno (čak neprebrojivo) mnogo. Zato geometrijske vjerojatnosti ne možemo računati prebrojavanjem, $P(A) = k(A)/k(\Omega)$, nego ih računamo mjerenjem odgovarajućih duljina, površina i volumena:

$$P(A) = \frac{m\ (A)}{m\ (\Omega)},$$

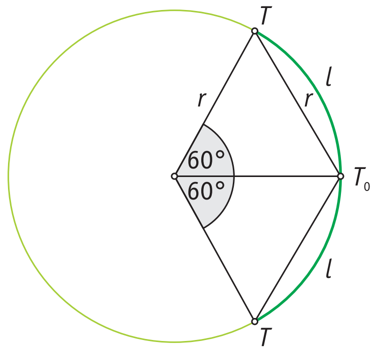
gdje je $m : \Omega \to R$ geometrijska mjera (duljina, površina ili volumen).

PRIMJER

1. Nasumce biramo dvije točke na kružnici radijusa r. Kolika je vjerojatnost da će udaljenost između tih dviju točaka biti manja od radijusa?

Rješenje

Fiksirajmo jednu točku, npr. T_0. Da bi udaljenost između točaka T_0 i T na kružnici bila manja od r, točka T mora pripadati jednomu od dvaju lukova l čiji je središnji kut jednak 60°; jedan u pozitivnom i jedan u negativnom smjeru od točke T. Pogledajmo sliku.



Vjerojatnost da točke pripadaju tomu luku jednaka je omjeru duljine luka i opsega kružnice:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{2l}{o} = \frac{2 \cdot \frac{r\pi \cdot 60^\circ}{180^\circ}}{2r\pi} = \frac{1}{3}.$$

ZADATAK

1. Kolika je vjerojatnost da za slučajno odabran realan broj x iz intervala $[-3,2]$ vrijedi $|x| < 1$?

PRIMJER **2.**

Dva prijatelja, Vedran i Bojan, idu svako jutro na posao s iste tramvajske stanice. Svaki od njih stiže na stanicu nasumce u vrijeme između 7.00 i 7.20. Voljni su se pričekati 5 minuta, nakon čega idu na tramvaj ili zajedno ili sami. Kolika je vjerojatnost da se prijatelji sretnu na stanici?

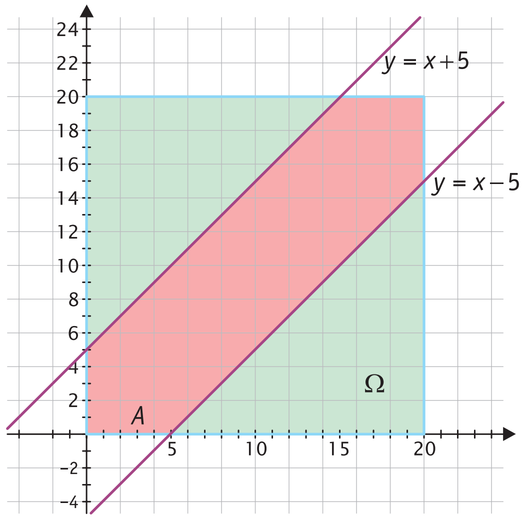
Rješenje

Neka je x vrijeme Vedranova, a y vrijeme Bojanova dolaska na stanicu, izraženo u minutama nakon 7 sati. Dakle $x, y \in [0,20]$ i sve točke (x, y) za koje to vrijedi čine „zeleni" kvadrat Ω čija je površina: $m(\Omega) = 20 \cdot 20 = 400$.

Vedran i Bojan srest će se na stanici ako je razlika u vremenima njihova dolaska manja od 5 minuta, tj. $|x - y| \leq 5$. Dakle,

$x - y \leq 5$ i $x - y \geq -5$ tj. $y \geq x - 5$ i $y \leq x + 5$

To je „crveni" presjek područja iznad pravca $y = x - 5$ i ispod pravca $y = x + 5$:



Skup A predstavlja povoljne ishode za događaj „prijatelji će se sresti na stanici". Površina skupa A razlika je površine skupa Ω i površina dvaju pravokutnih jednakokračnih trokuta:

$$m(A) = 400 - 2 \cdot \frac{15 \cdot 15}{2} = 175$$

Dakle, $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)} = \dfrac{175}{400} = 0.4375.$

ZADATAK **2.**

Dva teretna vlaka (neovisno jedan o drugome) dolaze na ranžirni kolodvor između 20 i 21 sat. Svako vrijeme njihova dolaska u tome intervalu jednako je vjerojatno. Nakon dolaska svaki od njih zadržava se 15 minuta na kontroli tereta i za to vrijeme drugi vlak mora čekati. Kolika je vjerojatnost da nijedan od tih dvaju vlakova ne mora čekati?

ZADATCI

3. Slučajno biramo realan broj između 0 i 6. Kolika je vjerojatnost da odabrani broj:

a) bude između 2 i 5

b) bude bliže broju 6 nego broju 5

c) ne bude između 0 i 1

d) bude između 2 i 4 ili između 3 i 5?

4. Djeca gađaju metu prikazanu na slici. Polumjer veće kružnice jest r, a manje $\frac{r}{2}$. Svi su kružni lukovi veće kružnice jednake duljine. Odredi vjerojatnost pogotka:

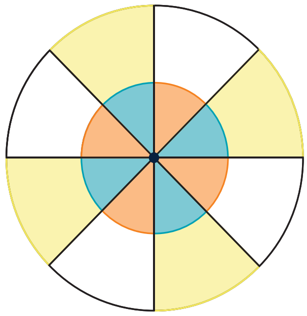
a) u narančasto polje

b) u plavo ili narančasto polje

c) u žuto polje

d) u bijelo ili plavo polje

e) bliže središtu mete nego rubnoj kružnici.

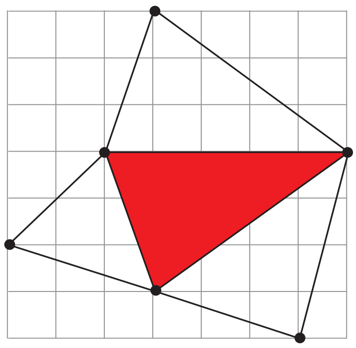


5. Nasumice biramo dva broja iz intervala $[0,4]$. Odredite vjerojatnost da za izabrane brojeve vrijedi:

a) $x < y$ i $x - y < 2$

b) $|x - y| \leq 2$.

6. Nacrtani šesterokut prikazuje park. Ana bira poziciju za piknik, koristeći se opcijom slučajnoga odabira (na računalu). Odredite vjerojatnost da odabrana pozicija bude unutar crvenoga područja.



7. Krug je upisan u pravilan šesterokut. Odredite vjerojatnost da slučajno odabrana točka unutar šesterokuta ne pripada krugu.

8. Dva su vrha trokuta na stranicama kvadrata $ABCD$ u točkama P i Q.

Točka P dijeli stranicu AB u omjeru 1 : 3 (od vrha A), a točka B stranicu BC u omjeru 3 : 1 (od vrha B). Treći vrh trokuta nalazi se u vrhu D. Odredi vjerojatnost da slučajno odabrana točka unutar kvadrata:

a) ne pripada trokutu PBQ

b) pripada trokutu PQD.

JESMO LI RAZUMJELI?

1. Vjerojatnost da će pri bacanju kocke pasti broj manji od 3 jest:

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$.

2. Vjerojatnost da ćeš se među 5 prozvanih učenika od 20 pronaći baš ti jest:

A. $\frac{1}{20}$ B. $\frac{1}{19}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{4}$.

3. U vrećici je 30 bombona, od kojih je 20 čokoladnih. Bez gledanja izvlačimo 1 bombon. Vjerojatnost da je čokoladni jest:

A. $\frac{1}{30}$ B. $\frac{1}{20}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$.

4. Ako istovremeno bacimo dvije kocke, vjerojatnost da će na jednoj pasti broj 1, a na drugoj broj 2 jest:

A. $\frac{1}{36}$ B. $\frac{1}{18}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$.

5. U kutiji je 10 ispuhanih balona, od kojih su 4 probušena. Ako izvučemo 1 balon, vjerojatnost da nije probušen jest:

A. $\frac{5}{21}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$.

6. Vjerojatnosti pojavljivanja triju događaja koji se međusobno isključuju redom su $\frac{1}{7}, \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}$. Vjerojatnost da će se pojaviti barem jedan od njih jest:

A. $\frac{1}{100}$ B. $\frac{107}{210}$ C. $\frac{104}{105}$ D. $\frac{124}{125}$.

7. Slučajno biramo prirodan broj manji ili jednak 50. Kolika je vjerojatnost da je izabrani broj paran ili djeljiv s 7?

A. 0.16 B. 0.32 C. 0.58 D. 0.66

8. Od 24 pokušaja maloga Roka da ispravno obuje cipele uspjelo mu je 15 puta. Vjerojatnost da će u idućemu pokušaju uspjeti jest:

A. 0.042 B. 0.067 C. 0.375 D. 0.625.

9. Vjerojatnost da slučajno izabrana točka birana iz kruga polumjera r nije u jednakostraničnom trokutu upisanome u taj krug jest:

A. $\frac{\pi-3\sqrt{3}}{4\pi}$ B. $\frac{\pi-3\sqrt{3}}{\pi}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ D. $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{4\pi}$.

10. Nit duga 50 cm slučajno pukne. Vjerojatnost da je pukla 20 cm od ruba jest:

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$.

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

1. Kolika je vjerojatnost da ćemo od sto kuglica koje su označene brojevima od 1 do 100 izvući kuglicu na kojoj postoji znamenka 1?

2. Na sreću odabiremo broj od 1 do 100. Kolika je vjerojatnost da odabrani broj pri dijeljenju s 9 daje ostatak 5?

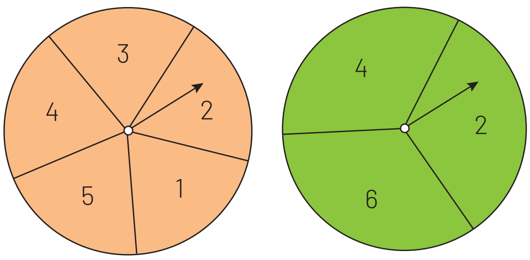
3. Iz skupa višekratnika broja 3 manjih od sto biramo dva broja. Kolika je vjerojatnost:

a) da su oba parna
b) jedan paran, a drugi neparan
c) da su oba prosta?

4. Pokus se sastoji od vrtnje strelice u krugovima s 5 i 3 područja kao na slici.

	1	2	3	4	5
2	(2, 1)				
4					
6					(6, 5)

Strelice će na slučajan način pokazati dva broja.



Dopuni gornju tablicu s elementarnim ishodima i odredi vjerojatnost sljedećih događaja:

a) oba su dobivena broja parna
b) zbroj brojeva jest paran
c) umnožak dobivenih brojeva manji je od 20
d) zbroj brojeva jest prost broj.

5. Strijelac gađa u metu i od 180 pokušaja pogodio je 160 puta.

a) Kolika je vjerojatnost da će pri sljedećemu pokušaju pogoditi metu?
b) Ako metu gađa 300 puta, koliko pogodaka možemo očekivati?

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

6. Službenik je 7 dana bilježio koliko je puta gradski autobus kasnio na odredište u toku dana. Autobus vozi na liniji koja svaki dan ima 10 vožnji. Dobiveni su sljedeći podatci:

dan	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
kasni	5	4	4	3	5	3	3

Odredite kolika je (približna) vjerojatnost da će autobus kasniti na sljedećoj vožnji.

7. Fotografija dimenzija 8 cm × 6 cm stavljena je u okrugli okvir tako da vrhovi fotografije dodiruju unutrašnji rub okvira. Kolika je vjerojatnost da muha koja leti prema okviru s fotografijom sleti na baš na fotografiju?

8. U jednakokračni pravokutni trokut upisan je pravokutnik kojemu je jedna stranica dva puta dulja od druge, tako da mu je jedan vrh u vrhu pravoga kuta trokuta. Ako biramo točku unutar trokuta, kolika je vjerojatnost da se ne nalazi u pravokutniku?

9. Ako biramo dva broja iz intervala $[0,2]$, kolika je vjerojatnost da je njihova suma manja od 3, a razlika veća od 1?

10. Andrea i Ivan stvoreni su jedno za drugo, ali se još nisu upoznali. Andrea svaki dan trči u parku između 7 i 30 i 8 i 30 sati. U istome tom vremenu u istome parku Ivan šeće svojega psa. Kolika je vjerojatnost da će se sresti ako se oboje zadržavaju kod fontane 15 minuta?

11. Kriminalac nakon pljačke bježi automobilom. Specijalni agent Iks čeka ga u zasjedi pokraj ceste i u trenutku kada pljačkaš prolazi pokraj njega Iks ispaljuje hitac u kotač automobila. Kolika je vjerojatnost da će pogoditi u gumu ako je kotač promjera 60 cm, a guma, gledajući sa strane, ima širinu 15 cm?

12. Valjak je upisan u pravilnu uspravnu trostranu prizmu. Odredi vjerojatnost da slučajno odabrana točka unutar prizme pripada valjku.

13. Komarac se nalazi zarobljen unutar lopte (kugle). Kolika je vjerojatnost da je bliže rubu (sferi) nego središtu kugle?

14. Kamion odvozi biootpad na jednome mjestu u gradu u slučajno odabranome trenutku između 10.00 i 11.00. Kada kamion dođe, zadržava se 5 min, a onda odlazi dalje. Marko u istome razdoblju, u slučajnom trenutku, dolazi odložiti otpad, čeka 15 minuta, a onda odlazi. Kolika je vjerojatnost da će Marko sresti kamion?

RJEŠENJA

VJEROJATNOST SLUČAJNOGA DOGAĐAJA

TEORIJSKA VJEROJATNOST *(A PRIORI)*

1. a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{4}{9}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{1}{3}$

2. a) $\frac{7}{9}$ **b)** $\frac{1}{9}$ **c)** 0 **d)** $\frac{4}{9}$

3. a) 0 **b)** 1

4. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** 0 **e)** 1

5. Najvjerojatniji je zbroj 7, $P(\text{zbroj } 7) = \frac{1}{6}$, najmanje je vjerojatan zbroj 2 ili 12, $P(\text{zbroj } 2) = P(\text{zbroj } 12) = \frac{1}{36}$.

7. a) 0.4 **b)** 0.6

8. $P(\text{dječak}) = 0.515$, $P(\text{djevojčica}) = 0.485$

9. $P(\text{Frane}) = 0.3$, $P(\text{Ana}) = 0.5$, $P(\text{Lovro}) = 0.2$

10. a) $\Omega = \{GGG, GGP, GPG, PGG, GPP, PGP, PPG, PPP\}$,

b) Prostor elementarnih događaja prikazan je elementima tablice:

	1	2	3	4	5	6
G	(G, 1)	(G, 2)	(G, 3)	(G, 4)	(G, 5)	(G, 6)
P	(P, 1)	(P, 2)	(P, 3)	(P, 4)	(P, 5)	(P, 6)

c) $\Omega = \{111, 110, 101, 011, 100, 010, 001, 000\}$

11. a) $\frac{1}{36}$ **b)** $\frac{5}{36}$ **c)** $\frac{25}{36}$ **d)** $\frac{1}{18}$ **e)** $\frac{5}{36}$ **f)** $\frac{5}{18}$

12. a) $\frac{1}{12}$ **b)** $\frac{5}{12}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{5}{12}$ **e)** $\frac{3}{4}$ **f)** $\frac{3}{4}$

13. $\frac{1}{3}$

14. a) $\frac{3}{8}$ **b)** $\frac{11}{36}$ **c)** $\frac{1}{7}$

15. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{10}$ **c)** $\frac{97}{200}$ **d)** $\frac{83}{200}$

16. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{83}{500}$ **c)** $\frac{81}{500}$

17. a) $\frac{1}{13}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{26}$ **d)** $\frac{1}{52}$ **e)** $\frac{12}{13}$ **f)** $\frac{9}{13}$

18. a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** 0 **e)** $\frac{7}{8}$ **f)** $\frac{1}{2}$ **g)** $\frac{1}{4}$ **h)** $\frac{1}{2}$

19. $\frac{2}{3}$

20. a)

ishod	1	2	3	4
relativne frekvencije	0.26	0.24	0.25	0.25

b) Da bi „kockica" bila fer, trebale bi vjerojatnosti svih ishoda biti jednake. Relativne su frekvencije svih ishoda blizu broja 0.25, no broj izvođenja pokusa nije jako veliki broj, pa da sa sigurnošću možemo tvrditi da je „kockica" fer.